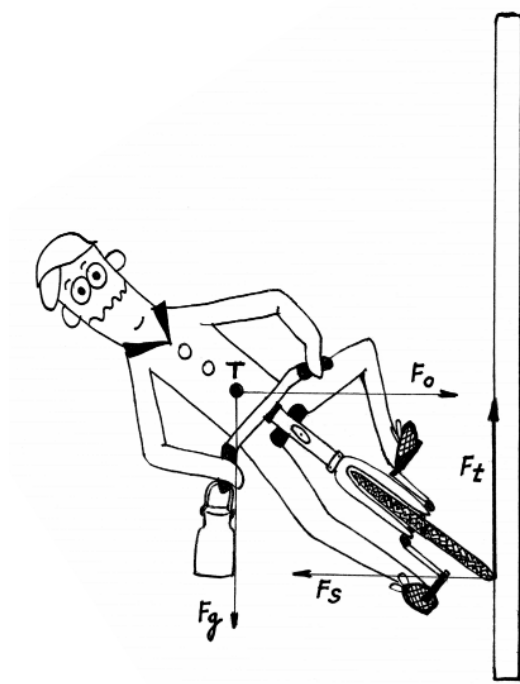


263 problémů z mechaniky, elektřiny a magnetismu



18. prosince 2011, Milan Červenka
milan.cervenka@fel.cvut.cz

Pár slov na úvod

Vážení, ať už dobrovolní či nedobrovolní uživatelé tohoto textu, předkládám Vám zde celkem 263 problémů a příkladů z několika partií spadajících do základního vysokoškolského kurzu fyziky. Příklady jsem se snažil vybírat tak, aby byly (alespoň z mého pohledu) zajímavé a praktické, a aby bylo vidět, že porozumíme-li dobře základním fyzikálním zákonitostem, můžeme porozumět světu kolem nás a pochopit i věci, které se zdánlivě příčí zdravému rozumu.

Některé příklady a problémy jsou řešené, většina je však bez uvedeného postupu řešení a můžete si tak nad nimi sami lámat hlavu. Je jasné, že je mnohem cennější umět nějaký problém samostatně vyřešit, než jenom rozumět postupu jeho řešení. Z tohoto důvodu jsou také výsledky uvedené až na konci textu, aby vás zbytečně nerozptylovaly. Výsledek si můžete jednoduše zobrazit tak, že v PDF souboru kliknete na jméno příkladu, čímž budete přesměrováni na správné místo. Zpět se dostanete tak, že kliknete na číslo příkladu u daného výsledku. Při té příležitosti bych Vás rád upozornil, že je velice užitečné naučit se pracovat s rozměry fyzikálních veličin, viz kapitola 1. Budete-li řešit jakýkoliv fyzikální problém, může být váš výsledek správný pouze tehdy, pokud bude mít správný rozměr. Z tohoto důvodu (nejen) se také vyplatí každý problém vždy řešit obecně a číselné hodnoty dosazovat až nakonec.

Často se stane, že když se začneme zabývat nějakým problémem ve větším detailu, narazíme na nějaké matematické „těžkosti“. Z tohoto důvodu jsou součástí sbírky některé příklady vyřešené za pomoci počítačového algebraického systému Maple (který mají studenti ČVUT k dispozici zdarma v rámci multilicence). Příslušné soubory pro Maple najdete na adrese <http://herodes.feld.cvut.cz/sbirka/>. Naučíte-li se nějaký takovýto systém využívat, můžete soustředit více pozornosti na vlastní fyzikální problém, přičemž integrály a diferenciální rovnice vyřeší program (fyzikální úvahu neudělá). Nehledě na skutečnost, že například analytické řešení některých algebraických či diferenciálních rovnic není obecně známé (anebo je velmi složité) a pak je počítač nenahraditelný při řešení numerickém. Neocenitelná je rovněž možnost nechat si vykreslit výsledek do grafu či animace a tak mu porozumět.

Skutečnost, že neplánuji nechat tento text zhmotnit v papírové podobě zřejmě zapříčiní, že časem začnou další příklady a problémy ve sbírce přibývat.

Děkuji Ing. Markovi Brothánkovi, Ph.D. za styl pro \LaTeX , ve kterém jsem mohl celou sbírku sepsat. Děkuji Mgr. Michalovi Kotroušovi, který mi nakreslil obrázek na titulní stranu. Obrázek se týká jednoho problému řešeného ve sbírce. Poznáte, jakého „fyzikálního prohřešku“ se autor obrázku dopustil? Děkuji všem autorům, z jejichž prací jsem mohl čerpat. Dále děkuji všem, kteří v textu naleznou nějakou chybu a dají mi o ní vědět. Vznik této sbírky byl podpořen grantem FRVŠ 1907/2011-F6.

18. prosince 2011, Milan Červenka
milan.cervenka@fel.cvut.cz

Obsah

1	Rozměrová analýza	10
1.1	Matematické kyvadlo	10
1.2	Přesýpací hodiny	10
1.3	Tlak v nitru Země a Slunce	10
1.4	Planckova soustava jednotek	11
1.5	Struna	11
2	Kinematika	12
2.1	Autobusy na Strahov	12
2.2	Automobil	12
2.3	Srážka vlaků?	12
2.4	Bezpečně z Řevnic na Skalku a zpět	12
2.5	Klikový mechanismus	13
2.6	Jak doběhnout pošťáka	13
2.7	Ferda Mravenec a Beruška	13
2.8	Časová závislost vzdálenosti dvou těles	14
2.9	Nejrychlejší cesta	14
2.10	Na nádraží	14
2.11	Pohyb s proměnným zrychlením 1	14
2.12	Pohyb s proměnným zrychlením 2	15
2.13	Elipsa	15
2.14	Šroubovice	15
2.15	Kamínek	16
2.16	Úloha z roku 1639	16
2.17	Na zámku Zbiroh	16
2.18	Volný pád 1	16
2.19	Volný pád 2	17
2.20	Volný pád 3	17
2.21	Tečné a normálové zrychlení při vodorovném vrhu	17
2.22	Opice	18
2.23	Bombardér	18
2.24	Jak daleko, tak vysoko	18
2.25	Nebezpečná zóna	19
2.26	Piráti	19
2.27	Šikmý vrh na nakloněnou rovinu	20
2.28	Rumpál	20
2.29	Rotující bod	20
2.30	Setrvačník	21
2.31	Rakety	21
3	Dynamika hmotného bodu	22
3.1	Jak zavěsit závaží	22
3.2	Závaží zavěšené na laně se vzpěrou	22
3.3	Jednoduchá kladka	23

3.4	Dvojitá kladka	23
3.5	Kladka a nakloněná rovina	23
3.6	Rovnoměrný pohyb po nakloněné rovině	24
3.7	Průjezd klopenou zatáčkou	24
3.8	Časově proměnná síla	25
3.9	Lod'	26
3.10	Odstředivka	26
3.11	Lano na stole	27
3.12	Parašutista	28
3.13	Kulička v oleji	29
3.14	Brzdění silou přímo úměrnou rychlosti	29
3.15	Brzdění silou úměrnou druhé mocnině rychlosti	29
3.16	Kulička na kouli	30
3.17	Nebezpečný kousek	31
3.18	Houpačka	31
3.19	Prak	31
3.20	Pružinový kanón	31
3.21	Sánky	31
3.22	Je řidič vinen?	32
3.23	Odpojený vagón	32
3.24	Střela	32
3.25	Kabel visící ze střechy domu	32
3.26	Provázek	33
3.27	Výstřel z děla	33
3.28	Úder kladivem	33
3.29	Špatný zpěvák	33
3.30	Pád z výšky na rotující Zemi	34
3.31	Řeka	35
3.32	Závaží na horizontálně kmitající desce	35
3.33	Závaží na vertikálně kmitající desce	35
3.34	Těleso zavěšené na pružině	36
3.35	Pád závaží na miskou na pružině	37
3.36	Jedno závaží na dvou pružinách	37
3.37	Bungee jump	37
3.38	Perioda kmitů z průběhu potenciální energie	37
3.39	Perioda kmitů z průběhu síly	38
4	Lagrangeovy rovnice II. druhu	39
4.1	Dvojitě kyvadlo	39
4.2	Kyvadlo na rotujícím kotouči	40
4.3	Závaží na pružině	41
4.4	Násada od koštěte	41
4.5	Kyvadlo na vozíku	41
4.6	Částice na nakloněné rovině	41
4.7	Korálek na drátě	41
4.8	Kuličky spojené provázkem	42

4.9	Cykloidální kyvadlo	42
4.10	Tři korálky	43
5	Hamiltonovy kanonické rovnice	44
5.1	Matematické kyvadlo	44
5.2	Závaží na pružině	44
5.3	Násada od koštěte	44
5.4	Korálek na drátě	44
6	Dynamika soustavy hmotných bodů	45
6.1	Železniční vagón v dešti	45
6.2	Jednoduchý rázostroj	45
6.3	Urychlovač	47
6.4	Dvě částice	47
6.5	Balistické kyvadlo	47
6.6	Střela v krabici	48
6.7	Pružná srážka částic	48
6.8	Nepružná srážka částic	48
6.9	Srážkový experiment	48
6.10	Pašeráci	49
6.11	Chůze na lodi	49
6.12	Nezabrzdnuté dělo	49
6.13	Dva vozíky na pružině	49
6.14	Dvě závaží na pružině	50
7	Mechanika tuhého tělesa	51
7.1	Visutá lávka	51
7.2	Auto v zatáčce	51
7.3	Jízda smrti	52
7.4	Cyklistův problém	53
7.5	Žebřík	53
7.6	Lahváče	53
7.7	Těžiště kužele	53
7.8	Těžiště polokoule	54
7.9	Těžiště rovinných objektů	55
7.10	Půlkruhový stůl	55
7.11	Dominové kostky	55
7.12	Ohnutý drát	56
7.13	Moment setrvačnosti tyče	56
7.14	Moment setrvačnosti válce 1	57
7.15	Moment setrvačnosti válce 2	57
7.16	Moment setrvačnosti koule	57
7.17	Moment setrvačnosti míče	58
7.18	Moment setrvačnosti krychle	58
7.19	Závod koule a válce	58
7.20	Nebezpečný kousek s kuličkou (modifikace příkladu 3.17)	59
7.21	Úder tágem do koule	59

7.22	Míč a schod	60
7.23	Různá kyvadla	61
7.24	Minimální perioda	61
7.25	Rumpál ještě jednou	61
7.26	Tovární komín	61
7.27	Výstřel na tyč	62
7.28	Úder do volně ležící tyčky	62
7.29	Jak přemístit bednu	62
7.30	Jak pootočít kosmickou lodí	62
7.31	Na kolotoči	63
7.32	Kulička na stole	63
8	Pružnost a pevnost	64
8.1	Tržná délka drátu	64
8.2	Jak zavěsit břemeno	64
8.3	Šplh po pružném laně	65
8.4	Komolý kužel	65
8.5	Prodloužení tyče vlastní vahou	65
8.6	Pilíř	66
9	Gravitační pole	67
9.1	Geostacionární družice	67
9.2	Lano visící z nebe	67
9.3	Potenciální energie gravitačního a tíhového pole	68
9.4	Halleyova kometa	68
9.5	Sputnik 1	68
9.6	Nejmenší rychlost družice	69
9.7	Doba oběhu družice kolem planety	69
9.8	Hmotnost Slunce	70
9.9	Hmotnost Jupiteru	70
9.10	Svislý vrh do velké výšky	70
9.11	III. kosmická rychlost	71
9.12	Nulová gravitace mezi Měsícem a Zemí	71
9.13	Pokusy na Zemi a Měsíci	71
9.14	Skok do nekonečna	71
9.15	Vlak poháněný gravitací	72
9.16	Stejná gravitace nad i pod povrchem Země	73
9.17	Volný pád na Slunce (matematicky náročnější)	73
9.18	Potenciál a intenzita gravitačního pole v okolí tyče (obecně)	73
9.19	Potenciál a intenzita gravitačního pole v ose tyče	73
9.20	Potenciál a intenzita gravitačního pole kolmo na osu tyče	74
9.21	Potenciál a intenzita gravitačního pole v okolí hmotné přímky	74
9.22	Potenciál a intenzita gravitačního pole v ose kruhové desky	74
9.23	Potenciál a intenzita gravitačního pole uvnitř a vně kulové slupky	74

10 Speciální teorie relativity	76
10.1 Nadsvětelná rychlost?	76
10.2 Mion	76
10.3 Raketa	77
10.4 Dvě rakety	77
10.5 Světelné záblesky z rakety	78
10.6 Relativistický pirát silnic	78
10.7 Hustota	78
10.8 Nabitá částice v elektrickém poli	78
10.9 Kinetická energie podle Einsteina a podle Newtona	79
10.10 Kinetická energie rovná klidové	80
10.11 Průlet galaxií	80
10.12 Jaderná fúze	80
10.13 Rozpad pionu	80
10.14 Srážka částic 1	81
10.15 Srážka částic 2	81
11 Mechanika kapalin	82
11.1 Ledovec ve sklenici vody	82
11.2 Plovoucí mosazná koule	82
11.3 Válec plovoucí v kapalině	82
11.4 Archimedes	82
11.5 Pokus u Mrtvého moře	83
11.6 Vážení na rovnoramenných vahách	83
11.7 Dvě kapaliny v u-trubici	84
11.8 Kmity kapaliny v u-trubici	84
11.9 Zkumavka	84
11.10 Rotující nádoba	85
11.11 Přehradní hráz	85
11.12 Stavidlo	86
11.13 Vodovod	86
11.14 Venturiho trubice	86
11.15 Za jak dlouho vyteče kapalina z nádoby?	87
11.16 Vodní hodiny	88
11.17 Injekční stříkačka	88
11.18 Výška hladiny	88
11.19 Z jaké výšky dostříkne kapalina nejdále?	88
11.20 Do stejné vzdálenosti	89
12 Elektrostatické pole	90
12.1 Kdo je silnější, Coulomb nebo Newton?	90
12.2 Nabité kuličky na provázku	90
12.3 Tři náboje	90
12.4 Pět nábojů	91
12.5 Potenciál a intenzita elektrického pole v ose kruhové smyčky	92
12.6 Potenciál a intenzita elektrického pole v ose kruhové desky	93
12.7 Potenciál a intenzita elektrického pole v okolí nabitě niti	93

12.8	Dvě nabité niti	94
12.9	Nevodivá nabitá koule	94
12.10	Vodivá nabitá koule	95
12.11	Kapky	96
12.12	Deskový kondenzátor 1	96
12.13	Deskový kondenzátor 2	97
12.14	Kulový kondenzátor	97
12.15	Kapacita Zeměkoule	98
12.16	Válcový kondenzátor	98
12.17	Kapacita dvojlinky	98
12.18	Krychle	98
12.19	Poloměr elektronu	99
12.20	Deskový kondenzátor s a bez dielektrické výplně	100
12.21	Síla, jíž se přitahují desky deskového kondenzátoru	100
12.22	Dipólový moment atomu v elektrostatickém poli	100
12.23	Vakuová dioda	101
13	Stacionární elektrický proud	102
13.1	Rychlost elektronů ve vodiči	102
13.2	Hybnost elektrického proudu	102
13.3	Krokové napětí	102
13.4	Kulový rezistor	103
13.5	Válcový rezistor	103
13.6	Kondenzátor se svodovým odporem	104
13.7	Nekonečná odporová síť	104
13.8	Transfigurace	104
13.9	Odporová krychle	105
13.10	Maximální výkon	105
13.11	Topná spirála	106
14	Magnetostatické pole	107
14.1	Magnetické pole v okolí přímého proudovodiče	107
14.2	Magnetické pole v ose kruhové smyčky	107
14.3	Helmholtzovy cívky	107
14.4	Magnetické pole ve středu čtvercové smyčky	108
14.5	Magnetické pole v ose nabitého rotujícího disku	108
14.6	Magnetické pole v ose rotující nabitá koule	108
14.7	Magnetické pole uvnitř a vně přímého proudovodiče	109
14.8	Magnetické pole uvnitř a vně solenoidu	110
14.9	Magnetické pole v ose solenoidu	111
14.10	Toroidální cívka	111
14.11	Síla působící na proudovodič	111
14.12	Dvě nabité niti, tentokráte v pohybu	112
14.13	Nabitá částice v homogenním magnetickém poli	112
14.14	Nabitá částice ve zkrříženém elektrickém a magnetickém poli	113

15 Elektromagnetická indukce	114
15.1 Vodič pohybující se v magnetickém poli	114
15.2 Urychlovač	115
15.3 Disk rotující v magnetickém poli	115
15.4 Generátor	115
15.5 Smyčka uvnitř solenoidu	116
15.6 Smyčka poblíž proudovodiče	116
15.7 Vlastní indukčnost solenoidu	116
15.8 Vlastní indukčnost toroidální cívky	117
15.9 Vzájemná indukčnost dvou kruhových smyček	117
15.10 Obvod s indukčností	118
16 Pár příkladů z vektorové analýzy	119
16.1 Gradient	119
16.2 Kopec	119
16.3 Divergence	119
16.4 Rotace	119
16.5 Potenciál	119
16.6 Křivkový integrál	120
17 Výsledky	121
18 Reference	148

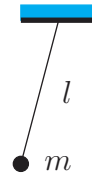
1. Rozměrová analýza

■ **Příklad 1.1: Matematické kyvadlo**

Matematické kyvadlo je hmotný bod o hmotnosti m zavěšený na nehmotném závěsu o délce l . Pomocí rozměrové analýzy odhadněte závislost doby kmitu T matematického kyvadla na jeho hmotnosti, délce a tíhovém zrychlení g .

Řešení: Vzorec pro periodu kyvadla budeme hledat ve tvaru

$$T = k m^\alpha l^\beta g^\gamma,$$



kde k je bezrozměrný koeficient (který rozměrovou analýzou neurčíme), α, β a γ jsou hledané koeficienty. Hledaná veličina má rozměr času, takže musí platit

$$[T] = [m]^\alpha [l]^\beta [g]^\gamma \Rightarrow s = \text{kg}^\alpha \text{m}^\beta (\text{m s}^{-2})^\gamma = \text{kg}^\alpha \text{m}^{\beta+\gamma} \text{s}^{-2\gamma}.$$

Jelikož můžeme psát $s = \text{kg}^0 \text{m}^0 \text{s}^1$ a exponenty u příslušných jednotek nalevo a napravo rovnice se musí navzájem rovnat, dostaneme pro koeficienty α, β a γ soustavu rovnic

$$\alpha = 0, \quad \beta + \gamma = 0, \quad -2\gamma = 1,$$

jejímž řešením dostaneme $\alpha = 0$, $\beta = 1/2$ a $\gamma = -1/2$, takže hledaný vzorec má tvar

$$T = k \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Již z rozměrové analýzy plyne, že perioda matematického kyvadla nezávisí na jeho hmotnosti. Řešením pohybové rovnice pro matematické kyvadlo bychom mohli zjistit, že $k = 2\pi$.

■ **Příklad 1.2: Přesýpací hodiny**

Přesýpací hodiny odměřují čas pomocí doby, kterou se sype jemný písek úzkým hrdlem o ploše S z horní do dolní nádoby. Experimentálně můžeme zjistit, že rychlost sypání $\Delta m / \Delta t$ (hmotnost přesypaná za jednotku času) závisí na průřezu otvoru S mezi nádobami, hustotě zrněk písku ρ a (zřejmě) na tíhovém zrychlení g . Naopak, nezávisí na velikosti zrněk a množství písku. Pomocí rozměrové analýzy odhadněte vztah pro určení rychlosti sypání $\Delta m / \Delta t$ písku v hodinách.

■ **Příklad 1.3: Tlak v nitru Země a Slunce**

Nemáme-li k dispozici další bližší informace, odhadujeme, že tlak v nitru hvězdy (planety) může záviset na její hmotnosti M , poloměru R , a jelikož jistě souvisí s gravitačními účinky hmoty, i na gravitační konstantě $\kappa = 6,672 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$ Newtonova gravitačního zákona. Pomocí rozměrové analýzy odhadněte vzorec pro výpočet tlaku v nitru hvězdy (planety) a odhadněte konkrétní hodnotu pro Slunce ($M_S = 1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$, $R_S = 696\,000 \text{ km}$) a Zemi ($M_Z = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$, $R_Z = 6\,378 \text{ km}$).

■ Příklad 1.4: Planckova soustava jednotek

Německý fyzik Max Planck navrhl soustavu jednotek, která je založena na základních přírodních konstantách: rychlosti světla ve vakuu $c = 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$, gravitační konstantě $\kappa = 6,672 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$ a Planckově konstantě $\hbar = 1,05 \times 10^{-34} \text{ J s}$. Kombinací těchto konstant můžeme nalézt veličinu rozměru času (Planckův čas t_p), veličinu rozměru délky (Planckovu délku l_p) a veličinu rozměru hmotnosti (Planckovu hmotnost m_p). Úvahy o kvantové gravitaci vedou k závěru, že v rozměrech řádově odpovídajících těmto jednotkám se zásadně mění charakter fyzikálních zákonů - Planckova délka a Planckův čas jsou možná nejmenšími, dále nedělitelnými kvanty prostoru a času. Pomocí rozměrové analýzy nalezněte velikost Planckových jednotek t_p , l_p a m_p .

■ Příklad 1.5: Struna

Asi každý, kdo viděl strunný hudební nástroj ví (nebo tuší), že frekvence, na které struna zní, nějak souvisí s její délkou l , silou F , kterou je struna natažena a její „tloušťkou“, kterou můžeme vyjádřit pomocí hmotnosti vztažené na jednotku délky μ . Najděte pomocí rozměrové analýzy vzorec pro frekvenci struny s využitím veličin l , F a μ .

2. Kinematika

■ **Příklad 2.1: Autobusy na Strahov**

Student se po přednášce z fyziky vrací pěšky z Dejvic na kolej Strahov a přitom si všimne, že autobus číslo 143 jej v protisměru míjí s intervalem $T_p = 10 \text{ min } 48 \text{ s}$, autobus jedoucí ve směru chůze s intervalem $T_v = 13 \text{ min } 30 \text{ s}$. Když dojde na kolej, spočítá interval T ve kterém autobus jezdí (za předpokladu, že v obou směrech je stejný) a poměr rychlosti své chůze ku rychlosti autobusu. Co mu vyjde?

■ **Příklad 2.2: Automobil**

Automobil rovnoměrně zpomaleným pohybem na dráze délky $l_b = 100 \text{ m}$ změnil svou rychlost z $v_1 = 60 \text{ km h}^{-1}$ na $v_2 = 40 \text{ km h}^{-1}$. Jaké má při tomto manévru zrychlení?

Řešení: Automobil se v průběhu brzdění pohyboval rovnoměrně zpomaleným pohybem, takže pro jeho rychlost a dráhu ujetou v průběhu brzdění můžeme psát

$$v(t) = v_1 + at, \quad l(t) = v_1 t + \frac{1}{2} at^2,$$

takže platí

$$v_2 = v_1 + a\tau, \quad l_b = v_1 \tau + \frac{1}{2} a\tau^2,$$

kde τ je doba trvání brzdění. Z levé rovnice vyjádříme tuto dobu a dosadíme ji do rovnice pravé

$$\tau = \frac{v_2 - v_1}{a} \Rightarrow l_b = v_1 \left(\frac{v_2 - v_1}{a} \right) + \frac{1}{2} a \left(\frac{v_2 - v_1}{a} \right)^2,$$

odkud pak vypočteme zrychlení a jako

$$a = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2l_b} = -0,77 \text{ m s}^{-2}.$$

■ **Příklad 2.3: Srážka vlaků?**

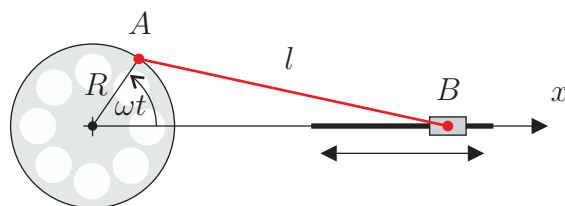
Strojvůdce rychlíku jedoucího rychlostí $v_r = 30 \text{ m s}^{-1}$ spatří před sebou na téže koleji nákladní vlak jedoucí stejným směrem rychlostí $v_n = 10 \text{ m s}^{-1}$. V okamžiku kdy jej spatřil, byla vzdálenost posledního vagónu nákladního vlaku a lokomotivy rychlíku $s_0 = 200 \text{ m}$. Strojvůdce velmi duchaplně začal okamžitě brzdit, čímž rychlík uvedl do rovnoměrně zpomaleného pohybu se zpomalením $a = 1 \text{ m s}^{-2}$. Dojde ke srážce vlaků? Pokud ano, tak v jaké vzdálenosti (od rychlíku v okamžiku registrace) a jakou mají v okamžiku srážky vlaky vzájemnou rychlost?

■ **Příklad 2.4: Bezpečně z Řevnic na Skalku a zpět**

Kopec z Řevnic na Skalku je dlouhý. Cyklista se rozhodne, že cestu tam a zpět projede průměrnou rychlostí $\bar{v} = 20 \text{ km h}^{-1}$. Cestu nahoru projede průměrnou rychlostí $\bar{v}_1 = 12 \text{ km h}^{-1}$. Jakou průměrnou rychlostí \bar{v}_2 musí sjet zpět, aby uskutečnil své předsevzetí?

Byl by schopen splnit své předsevzetí, když by cestu nahoru projel průměrnou rychlostí $\bar{v}'_1 = 10 \text{ km h}^{-1}$?

■ Příklad 2.5: Klikový mechanismus



Klikový mechanismus z obrázku je zařízení pro převod rotačního pohybu na pohyb translační. Určete polohu $x(t)$ koncového bodu táhla délky l , jestliže je spojeno s kolem o poloměru R otáčejícím se úhlovou rychlostí ω .

Řešení: Pro polohové vektory bodů A a B platí

$$\mathbf{r}_A = (R \cos \omega t, R \sin \omega t), \quad \mathbf{r}_B = (x, 0).$$

Protože platí (kosínová věta)

$$(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A) \cdot (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A) = l^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2xR \cos \omega t + R^2 - l^2 = 0,$$

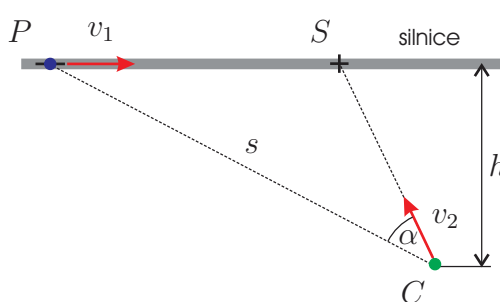
dostaneme pro hledanou souřadnici x vztah

$$x = R \cos \omega t \pm \sqrt{R^2 \cos^2 \omega t + l^2 - R^2},$$

kde kladné znaménko popisuje řešení s táhlem napravo, záporné pak řešení s táhlem nalevo od kola. Výsledek tedy můžeme psát ve tvaru

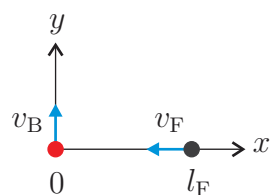
$$x = R \cos \omega t + \sqrt{l^2 - R^2 \sin^2 \omega t} \approx l + R \cos \omega t \quad (\text{pro } l \gg R).$$

■ Příklad 2.6: Jak doběhnout pošťáka



Člověk stojící ve vzdálenosti $h = 50 \text{ m}$ od silnice vidí pošťáka, který po ní jede na kole rychlostí $v_1 = 10 \text{ m s}^{-1}$ (viz obrázek). V okamžiku kdy jej spatří, je jejich vzdálenost $s = 200 \text{ m}$. Pod jakým úhlem α musí běžet k silnici rychlostí $v_2 = 3 \text{ m s}^{-1}$, aby se s ním setkal a předal mu dopis? Jakou minimální rychlostí musí běžet, aby pošťáka doběhl?

⊙ Příklad 2.7: Ferda Mravenec a Beruška

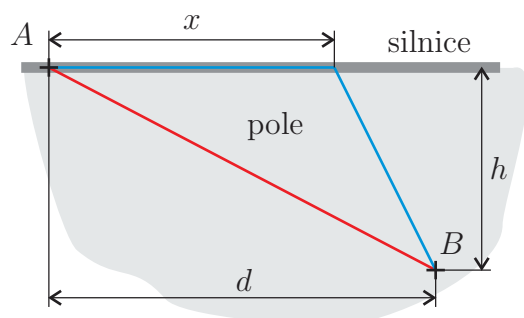


Beruška sedí ve středu kartézských souřadnic, Ferda Mravenec ve vzdálenosti l_F na ose x . V čase $t = 0$ začne Beruška lézt rychlostí v_B v kladném směru osy y a Ferda rychlostí v_F v záporném směru osy x . Najděte vzájemnou vzdálenost $l_{FB}(t)$ jakožto funkci času, čas t_n kdy si jsou nejbližší a jejich nejmenší vzdálenost l_n .

■ Příklad 2.8: Časová závislost vzdálenosti dvou těles

Dvě tělesa se ve stejný okamžik začala rovnoměrně přímočaře pohybovat ze stejného bodu, přičemž jejich vektory rychlostí svírají úhel α . Jaká je časová závislost jejich vzájemné vzdálenosti $l(t)$, pokud jedno z těles se pohybuje rychlostí o velikosti v a druhé rychlostí o velikosti $2v$?

■ Příklad 2.9: Nejrychlejší cesta



Cyklista na horském kole se potřebuje dostat z bodu A do bodu B , viz obrázek, kde $d = 2$ km a $h = 1$ km. Po silnici jede rychlostí $c = 30$ km/h, po zoraném poli rychlostí $v = c/3$. Jak dlouho pojede z bodu A do B nejkratší cestou (tj. po poli)? V jaké vzdálenosti x od bodu A musí uhnout ze silnice na pole, aby se dostal do bodu B nejrychleji? Jak dlouho pojede touto cestou?

Řešení: Pokud by cyklista jel po poli z bodu A do B přímo, rychlostí v by urazil vzdálenost $l_p = \sqrt{d^2 + h^2}$ za čas

$$t_p = \frac{l_p}{v} = \frac{3\sqrt{d^2 + h^2}}{c} = 13 \text{ m } 25 \text{ s.}$$

Jelikož rychlost po silnici je větší než po poli, vyplatí se jet kus cesty po silnici a cestu po poli si tak zkrátit. Pokud po silnici cyklista urazí vzdálenost $l_s = x$, po poli mu bude zbývat vzdálenost $l'_p = \sqrt{(d-x)^2 + h^2}$ a pro celkový čas bude platit

$$t_{sp} = \frac{l_s}{c} + \frac{l'_p}{v} = \frac{x}{c} + \frac{\sqrt{(d-x)^2 + h^2}}{v}. \quad (1)$$

Hledáme vzdálenost x takovou, kdy je čas t_{sp} minimální. Z podmínky pro extrém dostaneme

$$\frac{dt_{sp}}{dx} = \frac{1}{c} - \frac{d-x}{v\sqrt{(d-x)^2 + h^2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = d - \frac{vh}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 1646 \text{ m.}$$

Dosažením této hodnoty do vzorce (1) dostaneme celkovou dobu jízdy $t_{sp} = 9 \text{ m } 39 \text{ s}$, časová úspora je $\Delta t = 3 \text{ m } 46 \text{ s}$.

■ Příklad 2.10: Na nádraží

Výpravčí stojí na peróně na začátku prvního vagónu stojícího vlaku. Vlak se dá do rovnoměrně zrychleného pohybu takovým způsobem, že první vagón míjí výpravčího po dobu Δt_1 . Jakou dobu Δt_n míjí výpravčího n -tý vagón?

■ Příklad 2.11: Pohyb s proměnným zrychlením 1

Hmotný bod se pohybuje podél osy x tak, že pro jeho zrychlení platí

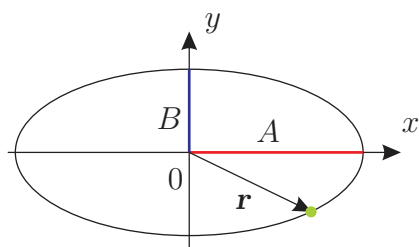
$$a = a_0 (1 - e^{-kt}),$$

kde $a_0 > 0$, $k > 0$ jsou konstanty a t je čas. Vypočítejte rychlost v a polohu x bodu jako funkci času za předpokladu, že v čase $t = 0$ platí $v = 0$, $x = 0$.

■ Příklad 2.12: Pohyb s proměnným zrychlením 2

Hmotný bod se pohybuje přímočaře se zrychlením, které rovnoměrně klesá z hodnoty $a_0 = 10 \text{ m s}^{-2}$ v čase $t = 0$ na nulovou hodnotu v čase $t = \tau = 20 \text{ s}$. Určete jeho rychlost a polohu v čase τ , víte-li, že pro $t = 0$ je $v = 0$ a $x = 0$.

■ Příklad 2.13: Elipsa



Hmotný bod se pohybuje v rovině xy po trajektorii zadané parametrickými rovnicemi

$$x = A \cos \omega t, \quad y = B \sin \omega t,$$

kde $A > B > 0$. Ukažte, že tato trajektorie je elipsa. Vypočítejte složky a velikost vektoru rychlosti. Jaká je maximální a minimální rychlost? Vypočítejte složky a ve-

likost vektoru zrychlení.

■ Příklad 2.14: Šroubovice

Nabitá částice v homogenním magnetickém poli se pohybuje po šroubovici, která je popsána parametrickými rovnicemi

$$x = A \cos \omega t, \quad y = A \sin \omega t, \quad z = Bt,$$

kde $A > 0$, B a ω jsou konstanty. Vypočítejte složky a velikost vektoru rychlosti, složky a velikost vektoru zrychlení, vektor zrychlení rozložte na tečnou a normálovou složku a vypočítejte poloměr křivosti trajektorie.

Řešení: Složky vektoru rychlosti spočteme jako derivace složek polohového vektoru

$$v_x = \dot{x} = -\omega A \sin \omega t, \quad v_y = \dot{y} = \omega A \cos \omega t, \quad v_z = \dot{z} = B.$$

Pro velikost vektoru rychlosti dostaneme

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\omega^2 A^2 + B^2},$$

velikost rychlosti je konstantní, pohyb je tedy rovnoměrný. Pro složky vektoru zrychlení platí

$$a_x = \dot{v}_x = -\omega^2 A \cos \omega t, \quad a_y = \dot{v}_y = -\omega^2 A \sin \omega t, \quad a_z = \dot{v}_z = 0,$$

velikost tohoto vektoru je pak

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \omega^2 A.$$

Velikost tečného zrychlení vypočteme jako derivaci velikosti vektoru rychlosti

$$a_t = \dot{v} = \frac{d}{dt} \left(\sqrt{\omega^2 A^2 + B^2} \right) = 0,$$

což vyplývá z rovnoměrnosti pohybu. Pro normálové zrychlení dostaneme

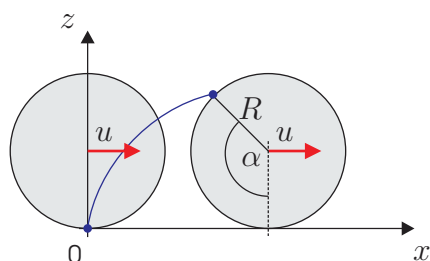
$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n \Rightarrow \mathbf{a}_n = \mathbf{a} - \mathbf{a}_t \Rightarrow \mathbf{a}_n = \mathbf{a},$$

normálové zrychlení náboje se tedy rovná zrychlení celkovému. Pro poloměr křivosti trajektorie R platí

$$a_n = \frac{v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{v^2}{a_n} = A + \frac{B^2}{\omega^2 A},$$

poloměr křivosti trajektorie je tedy větší než poloměr šroubovice.

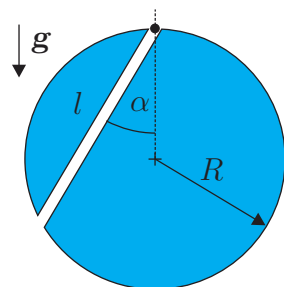
■ Příklad 2.15: Kamínek



Automobil se pohybuje rovnoměrně přímočaře rychlostí $\mathbf{u} = (u, 0, 0)$. Po jaké trajektorii se pohybuje kamínek uvízlý ve vzorku pneumatiky, jestliže její poloměr je R ? Jaké jsou složky a velikost vektoru rychlosti kamínku? Jaká je nejmenší a největší velikost rychlosti kamínku? Jaké jsou složky a velikost vektoru zrychlení kamínku?

■ Příklad 2.16: Úloha z roku 1639

První český fyzik, Jan Marek Marci z Lanškrouna (1595-1667), ve své knize „O úměrnosti pohybu“ řešil tuto úlohu.



Malá kulička se může v tíhovém poli volně pohybovat ve žlábků, jehož směr svírá s vertikálou úhel α a prochází kruhem o poloměru R . Jak závisí doba průchodu kuličky žlábkem t_p na velikosti úhlu α ?

⊙ Příklad 2.17: Na zámku Zbiroh

Turista na zámku Zbiroh se naklání nad studnu, přičemž mu do ní z náprsní kapsy košile vypadne mobilní telefon. Duchaplně ihned zapne stopky a změří, že žuchnutí telefonu o dno uslyší za čas $t = 6,24$ s po vypadnutí telefonu. Jak hluboká je studna na zámku Zbiroh, jestliže tíhové zrychlení $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$ a rychlost zvuku ve studni $c = 340 \text{ m s}^{-1}$?

■ Příklad 2.18: Volný pád 1

Těleso padá volným pádem z výšky h . Rozdělte tuto výšku na n úseků tak, aby doba pádu v každém úseku byla stejná, najděte vzorec pro délku i -tého úseku.

Příklad 2.19: Volný pád 2

Těleso padá volným pádem z výšky h . Rozdělte tuto výšku na n stejných úseků. Jaká bude doba pádu t_i v i -tém úseku?

Příklad 2.20: Volný pád 3

Předmět spadl volným pádem z neznámé výšky H na zem. Pozorovatel změřil, že posledních h metrů předmět padal τ sekund. Z jaké výšky předmět spadl?

Řešení: Úsek délky h předmět padal τ sekund, bude tedy platit

$$h = \frac{1}{2}g\tau^2 + v_0\tau, \quad (1)$$

kde v_0 je rychlost předmětu ve výšce h . Pro tuto rychlost dostaneme

$$v_0 = g(T - \tau), \quad (2)$$

kde T je celková doba volného pádu, pro kterou platí

$$H = \frac{1}{2}gT^2 \Rightarrow T = \sqrt{\frac{2H}{g}}. \quad (3)$$

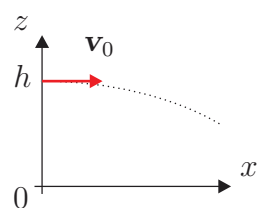
Po dosazení z (3) do (2) a potom z (2) do (1) dostaneme výsledek

$$h = \sqrt{2gH}\tau - \frac{1}{2}g\tau^2 \Rightarrow H = \frac{(2h + g\tau^2)^2}{8g\tau^2}.$$

Příklad 2.21: Tečné a normálové zrychlení při vodorovném vrhu

Těleso bylo vrženo vodorovně z výšky h počáteční rychlostí o velikosti v_0 . Jaká je v průběhu letu tělesa velikost jeho zrychlení celkového, tečného a normálového? Odpor vzduchu zanedbejte.

Řešení:



Pro složky vektorů zrychlení, rychlosti a polohového vektoru dostaneme

$$\begin{aligned} a_x &= 0, & a_z &= -g, \\ v_x &= v_0, & v_z &= -gt, \\ x &= v_0t, & z &= h - \frac{1}{2}gt^2. \end{aligned}$$

Dobu letu t_1 tělesa dostaneme z podmínky $z = 0$ jako

$$0 = h - \frac{1}{2}gt_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Pro velikost celkového zrychlení tělesa dostaneme

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_z^2} = g.$$

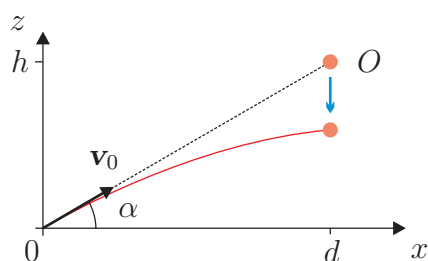
Pro velikost tečného zrychlení platí

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \sqrt{v_x^2 + v_z^2} = \frac{d}{dt} \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2} = \frac{g^2 t}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}}.$$

Protože tečné a normálové zrychlení jsou na sebe navzájem kolmá, platí $a^2 = a_t^2 + a_n^2$, takže pro velikost normálového zrychlení dostaneme

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \sqrt{g^2 - \frac{g^4 t^2}{v_0^2 + g^2 t^2}} = \frac{v_0 g}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}}.$$

■ Příklad 2.22: Opice



Lovec v Africe chce střelit opici¹, která se pohupuje na větvi stromu. Vodorovná vzdálenost mezi hlavní pušky a opicí je d , svislá h (viz obrázek). Lovec ví, že v okamžiku kdy opice zahlédne záblesk výstřelu (což je vzhledem k rychlosti světla prakticky okamžitě) se pustí a padá volným pádem k zemi. Pod jakým úhlem α musí lovec vystřelit, aby opici zasáhl? Velikost počáteční rychlosti střely je v_0 .

■ Příklad 2.23: Bombardér

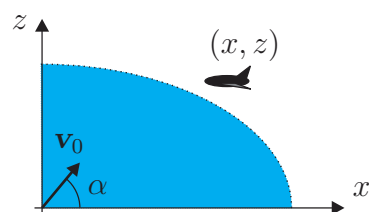
Bombardér letí vodorovně ve výšce h konstantní rychlostí o velikosti v_0 směrem k cíli. V jaké vzdálenosti d od cíle musí být bomba vypuštěna, aby zasáhla místo určení? Jakou rychlostí bomba dopadne na zem? Odpor vzduchu zanedbejte.

■ Příklad 2.24: Jak daleko, tak vysoko

Pod jakým elevačním úhlem α musíme hodit předmětem, aby vzdálenost, do které dopadne, byla rovna maximální výšce, do které vystoupí?

¹Uspávací šipkou, opice skončí v ZOO, kde se jí bude docela líbit.

● Příklad 2.25: Nebezpečná zóna



Najděte vztah popisující hranici nebezpečné zóny, pod kterou hrozí sestřelení letadla dělem, jehož střely mají konstantní velikost počáteční rychlosti v_0 a je možné pouze měnit jejich směr.

Řešení: Trajektorie střel je trajektorií šikmého vrhu, kterou lze popsat pomocí vztahu

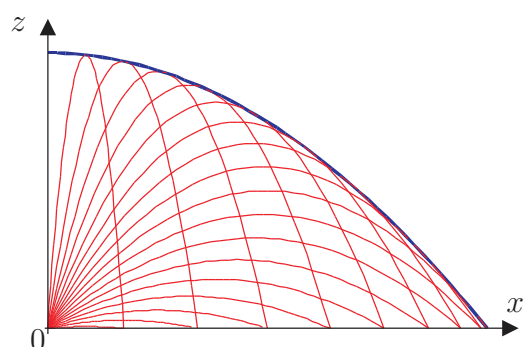
$$z = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}. \quad (1)$$

Využijeme-li identity

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha,$$

můžeme rovnici (1) psát ve tvaru

$$z = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2} (1 + \tan^2 \alpha). \quad (2)$$

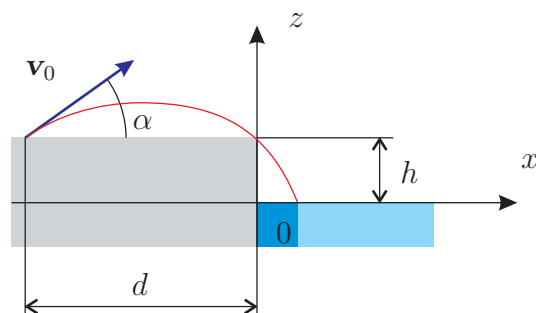


Tato kvadratická rovnice (vzhledem k proměnné $\tan \alpha$) může mít buď dvě různá reálná řešení (existují dva způsoby jak zasáhnout letadlo), nebo dvě komplexně sdružená řešení (řešení v reálném oboru neexistuje – letadlo nelze zasáhnout), nebo jedno dvojnásobné řešení. Množina bodů (x, z) , pro které má kvadratická rovnice (2) jedno dvojnásobné řešení odpovídá hledané křivce. Z podmínky pro nulový diskriminant dostaneme

$$x^2 - 4 \frac{gx^2}{2v_0^2} \left(z + \frac{gx^2}{2v_0^2} \right) = 0 \Rightarrow z = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}.$$

Hledanou funkcí je tedy parabola a nebezpečnou zónou je vnitřek rotačního paraboloidu s osou symetrie z .

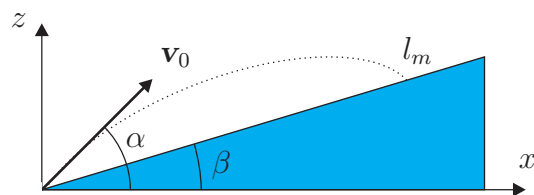
■ Příklad 2.26: Piráti



Na strmém útesu o výšce $h = 100 \text{ m}$ je ve vzdálenosti $d = 1 \text{ km}$ od moře pevnost s dělem bránící pobřeží. Do jaké vzdálenosti x_m od břehu jsou piráti chráněni útesem před dělovými koulemi? Velikost počáteční rychlosti dělových koulí je $v_0 = 120 \text{ m s}^{-1}$.

■ Příklad 2.27: Šikmý vrh na nakloněnou rovinu

Pod jakým úhlem α musíme šikmo vrhnout předmět na nakloněnou rovinu se sklonem β tak, abychom dohodili nejdále?



Řešení: Trajektorie šikmého vrhu s počáteční rychlostí v_0 a úhlem α má tvar

$$z = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha},$$

šikmou stěnu nakloněné roviny můžeme popsat výrazem $z = x \tan \beta$. Porovnáním obou vztahů dostaneme rovnici

$$x = \frac{2v_0^2}{g} (\tan \alpha - \tan \beta) \cos^2 \alpha = \frac{2v_0^2}{g} (\sin \alpha \cos \alpha - \tan \beta \cos^2 \alpha),$$

která odpovídá x -ové souřadnici bodu dopadu. Jelikož pro maximální vzdálenost vrhu l_m musí být i vzdálenost x maximální, můžeme psát

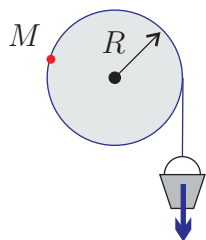
$$\frac{dx}{d\alpha} = \frac{2v_0^2}{g} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha + 2 \tan \beta \sin \alpha \cos \alpha) = \frac{2v_0^2}{g} (\cos 2\alpha + \tan \beta \sin 2\alpha).$$

Z podmínky pro extrém pak dostaneme

$$\frac{dx}{d\alpha} = 0 \Rightarrow \tan \beta = -\cot 2\alpha = \tan \left(2\alpha - \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow \alpha = \frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

Tento výsledek pro $\beta = 0$ přechází ve známý vztah $\alpha = \pi/4$.

■ Příklad 2.28: Rumpál



Kbelík zavěšený na provázku omotaném kolem rumpálu o poloměru R padá do studny. přičemž jeho dráha je dána vztahem

$$s = \frac{1}{2}kt^2.$$

Jaká je velikost zrychlení mouchy sedící na rumpálu?

■ Příklad 2.29: Rotující bod

Hmotný bod se pohybuje po kružnici o poloměru $r = 0,1$ m, přičemž jeho úhlová souřadnice (v radiánech) je dána funkčním předpisem

$$\varphi = 2 + 4t^3,$$

kde t je čas v sekundách. Jaká je velikost tečného zrychlení a_t a normálového zrychlení a_n tohoto bodu v čase $t = 2$ s? Jakou úhlovou souřadnici φ_α má bod v okamžiku, kdy vektor jeho zrychlení svírá s průvodičem úhel $\alpha = 45^\circ$?

Řešení: Pro úhlovou rychlost ω a úhlové zrychlení ε platí

$$\omega = \dot{\varphi} = 12t^2, \quad \varepsilon = \dot{\omega} = 24t.$$

Pro velikost tečného a normálového zrychlení rotačního pohybu pak dostaneme

$$a_t = \dot{v} = \varepsilon r = 24rt, \quad a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r = 144rt^4,$$

v čase $t = 2\text{ s}$ po dosažení číselných hodnot tedy $a_t = 4,8\text{ m s}^{-2}$, $a_n = 230,4\text{ m s}^{-2}$.

Vektor zrychlení bude s průvodičem svírat úhel $\alpha = 45^\circ$ v okamžiku, kdy si velikost tečného a normálového zrychlení budou rovnat, tedy

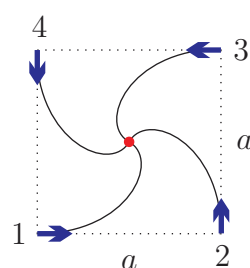
$$a_t = a_n \Rightarrow \varepsilon = \omega^2 \Rightarrow 24t = 144t^4 \Rightarrow t_\alpha^3 = \frac{1}{6},$$

dosažením tohoto času do vzorce pro úhlovou souřadnici dostaneme $\varphi_\alpha = 8/3\text{ rad}$.

■ Příklad 2.30: Setrvačnick

Setrvačnick se otáčí s frekvencí $f_0 = 1\,500\text{ ot min}^{-1}$. Brzděním přejde do rovnoměrně zpomaleného pohybu a v čase $\tau = 30\text{ s}$ od počátku brzdění se zastaví. Jaké je jeho úhlové zrychlení ε a kolik otoček N v průběhu brzdění vykoná?

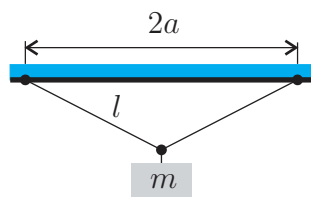
⊙ Příklad 2.31: Rakety



Čtyři samonaváděcí rakety jsou umístěny v rozích pomyslného čtverce o straně a . Jejich konstrukce je taková, že se pohybují rychlostí konstantní velikosti v a to tak, že raketa 1 vždy míří přímo na raketu 2, raketa 2 vždy míří přímo na raketu 3, ta vždy míří na raketu 4 a ta na raketu 1. V čase $t = 0$ jsou rakety odpáleny. Vypočítejte za jak dlouho se srazí a po jakých trajektoriích se pohybují.

3. Dynamika hmotného bodu

■ Příklad 3.1: Jak zavěsit závaží



Na dva stejné řetízky je třeba zavěsit závaží o hmotnosti m , viz obrázek, přičemž hřebíky, ke kterým se řetízky připevní, jsou umístěny vodorovně ve vzdálenosti $2a$. Jakou délku $l > 2a$ musí řetízky mít, pakliže je nelze zatížit silou o velikosti větší než F_p ? Hmotnost řetízků můžeme zanedbat.

Řešení: Má-li být závaží v klidu, musí výslednice sil na něj působících být nulová

$$\mathbf{0} = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 \quad \Rightarrow \quad mg = 2F \cos \alpha, \quad (1)$$

kde $F = |\mathbf{F}_1| = |\mathbf{F}_2|$ a α je úhel, který síly \mathbf{F}_1 a \mathbf{F}_2 svírají s vertikálou.

S využitím Pýthagorovy věty pro něj platí

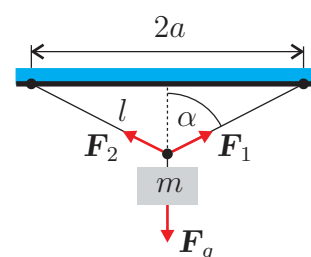
$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{l^2 - a^2}}{l},$$

dosazením do vztahu (1) dostaneme vzorec pro velikost síly napínající řetízky

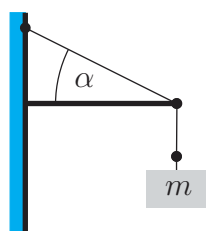
$$F = \frac{mg}{2 \cos \alpha} = \frac{mgl}{2\sqrt{l^2 - a^2}},$$

odkud je vidět, že s rostoucí délkou řetízků klesá síla, která je napíná. Musí tedy platit

$$F = \frac{mgl}{2\sqrt{l^2 - a^2}} \leq F_p \quad \Rightarrow \quad l \geq \frac{2F_p a}{\sqrt{4F_p^2 - m^2 g^2}}.$$

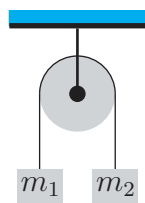


■ Příklad 3.2: Závaží zavěšené na laně se vzpěrou



Závaží o hmotnosti m je zavěšeno na laně podepřeném vodorovnou vzpěrou, přičemž pro úhel, který svírá vzpěra a lano, platí $\alpha = 30^\circ$. Vypočítejte velikost tahové síly, T_n , kterou je napínáno lano nad vzpěrou, velikost tlakové síly T_v , kterou je namáhána vzpěra a velikost tahové síly T_p , kterou je natahováno lano pod vzpěrou. Předpokládejte přitom, že hmotnost lana a vzpěry lze zanedbat.

■ Příklad 3.3: Jednoduchá kladka



Na kladku z obrázku jsou pomocí pevného vlákna zavěšena závaží o hmotnostech m_1 a m_2 . S jakým zrychlením se tato závaží pohybují, pokud můžeme hmotnost vlákna i volně se otáčející kladky zanedbat? Jakou silou je vlákno napínáno?

Řešení: Úloha je jednorozměrná, kladný směr souřadnice nechť je ve směru tíhového zrychlení. Pro jednotlivá závaží napíšeme pohybové rovnice

$$m_1 a_1 = F_{g1} - T_1, \quad m_2 a_2 = F_{g2} - T_2,$$

kde a_i jsou zrychlení jimiž se závaží pohybují, $F_{gi} = m_i g$ jsou nenulové složky tíhových sil a T_i jsou síly napínající vlákno. Jelikož uvažujeme vlákno zanedbatelně malé hmotnosti a kladka se může volně otáčet, musí platit $T_1 = T_2 = T$. Jelikož je vlákno pevné (nepružné), musí platit $a_1 = -a_2 = a$. Pohybové rovnice tedy mají tvar

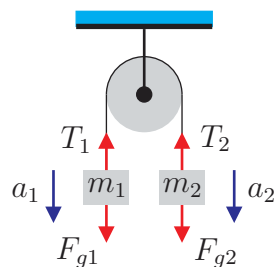
$$m_1 a = m_1 g - T, \quad -m_2 a = m_2 g - T. \quad (1)$$

Jejich odečtením dostaneme výraz pro zrychlení

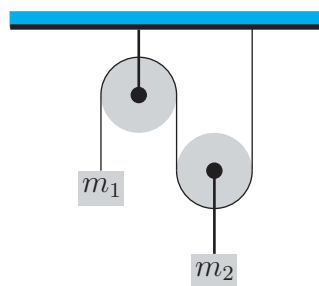
$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g,$$

dosazením vypočteného zrychlení například do levé rovnice (1) dostaneme vztah pro velikost síly napínající vlákno

$$T = m_1 g - m_1 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g.$$

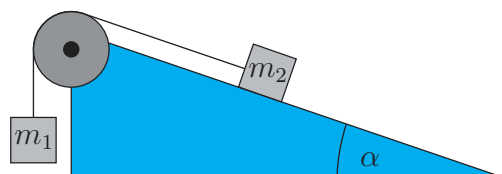


■ Příklad 3.4: Dvojitá kladka



Závaží o hmotnostech m_1 a m_2 jsou zavěšena na systému kladek z obrázku. Obě kladky se mohou volně otáčet, jejich hmotnost je natolik malá, že ji můžeme společně s hmotností vlákna zanedbat. S jakým zrychlením se pohybují jednotlivá závaží a jaká je velikost síly napínající vlákno?

■ Příklad 3.5: Kladka a nakloněná rovina



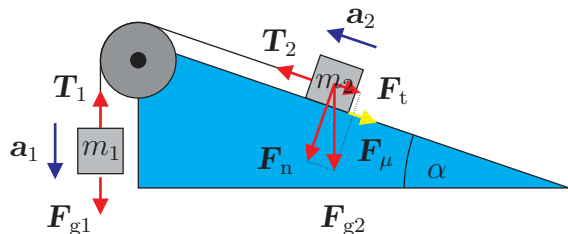
Závaží o hmotnostech m_1 a m_2 jsou přes kladku propojena pevným vlákem, přičemž první visí na vlákně a druhé je umístěno na nakloněné rovině s úhlem sklonu α , viz obrázek. Vypočítejte zrychlení závaží a velikost síly napínající vlákno, víte-li, že

koeficient smykového tření mezi nakloněnou rovinou a závažím je μ a že hmotnost vlákna i kladky můžete zanedbat.

Nápověda: Zamyslete se nad směrem třecí síly!

Řešení: Pohybové rovnice pro závaží mají tvar

$$m_1 \mathbf{a}_1 = \mathbf{F}_{g1} + \mathbf{T}_1, \quad m_2 \mathbf{a}_2 = \mathbf{F}_t + \mathbf{T}_2 + \mathbf{F}_\mu,$$



kde \mathbf{F}_μ je třecí síla a \mathbf{F}_t je složka tíhové síly ve směru nakloněné roviny. Jelikož se kladka může volně otáčet a hmotnost vlákna můžeme zanedbat, je velikost síly napínající vlákno po celé jeho délce stejná. Pro velikost třecí síly platí

$$F_\mu = \mu F_n = \mu F_{g2} \cos \alpha = \mu m_2 g \cos \alpha.$$

Označíme-li pro první závaží kladným znaménkem směr dolů a pro druhé závaží směr podél nakloněné roviny nahoru, můžeme jednorozměrné pohybové rovnice psát ve tvaru.

$$m_1 a = m_1 g - T, \quad m_2 a = T - m_2 g \sin \alpha - \text{sign}(v) \mu m_2 g \cos \alpha, \quad (1)$$

kde $a = a_1 = a_2$ a funkce $\text{sign}(v)$ je definována jako

$$\text{sign}(v) = 1 \text{ pro } v \geq 0, \quad \text{sign}(v) = -1 \text{ pro } v < 0$$

a vyjadřujeme pomocí ní skutečnost, že třecí síla vždy brzdí (případný) pohyb.

Zrychlení závaží získáme sečtením rovnic (1) ve tvaru

$$a = \frac{m_1 - m_2 [\sin \alpha + \text{sign}(v) \mu \cos \alpha]}{m_1 + m_2} g,$$

dosazením tohoto výsledku do levé z rovnic (1) vypočteme velikost síly napínající vlákno

$$T = \frac{m_1 m_2 [1 + \sin \alpha + \text{sign}(v) \mu \cos \alpha]}{m_1 + m_2} g.$$

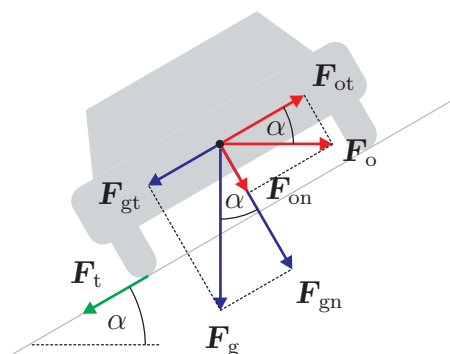
■ Příklad 3.6: Rovnoměrný pohyb po nakloněné rovině

Po nakloněné rovině s úhlem sklonu α se smýká směrem dolů předmět tak, že jeho rychlost je konstantní. Jakou velikost má koeficient smykového tření mezi předmětem a nakloněnou rovinou?

■ Příklad 3.7: Průjezd klopenou zatáčkou

Jakou maximální rychlostí v_{\max} může automobil projet zatáčkou o poloměru R , aby nedostal smyk, jestliže koeficient smykového tření mezi pneumatikami a vozovkou je μ a zatáčka je sklopena dovnitř oblouku pod úhlem α ? Vypočtěte konkrétní hodnoty maximální rychlosti pro $R = 200$ m, $\mu = 0,6$ a dva případy: $\alpha_1 = 0^\circ$, $\alpha_2 = 30^\circ$.

Řešení: V neinerciální vztažné soustavě spojené se zatáčejícím automobilem působí tři síly: tíhová \mathbf{F}_g , odstředivá \mathbf{F}_o , a třecí \mathbf{F}_t , která brání vynesení automobilu ze zatáčky.



Aby automobil zatáčkou bezpečně projel, musí být třecí síla větší nebo rovna tečné složce odstředivé síly zmenšené o příslušnou složku síly tíhové. Musí tedy platit

$$F_t \geq F_{ot} - F_{gt}, \quad (1)$$

přičemž

$$F_{gt} = mg \sin \alpha, \quad F_{ot} = m \frac{v^2}{R} \cos \alpha.$$

Pro velikost normálové síly, která tlačí automobil k vozovce, platí

$$F_n = F_{gn} + F_{on} = mg \cos \alpha + m \frac{v^2}{R} \sin \alpha.$$

Velikost třecí síly je úměrná velikosti normálové síly, $F_t = \mu F_n$, takže dosazením do nerovnosti (1) dostaneme podmínku pro bezpečný průjezd zatáčkou ve tvaru

$$\mu g \cos \alpha + \mu \frac{v^2}{R} \sin \alpha \geq \frac{v^2}{R} \cos \alpha - g \sin \alpha.$$

Odtud dostaneme algebraickou úpravou maximální rychlost, kterou lze beze smyku zatáčkou projet

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{gR(\mu + \tan \alpha)}{1 - \mu \tan \alpha}}.$$

Dosazením číselných hodnot zjistíme, že tato rychlost pro neklopenou zatáčku ($\alpha_1 = 0^\circ$) je $v_{\max 1} = 123,5 \text{ km h}^{-1}$, pro zatáčku s úhlem sklonu $\alpha_2 = 30^\circ$ pak $v_{\max 2} = 214 \text{ km h}^{-1}$.

■ Příklad 3.8: Časově proměnná síla

Na hmotný bod o hmotnosti m , který je v klidu v počátku kartézských souřadnic, začne v čase $t = 0$ působit proměnná síla $\mathbf{F} = (F_x, 0, 0)$, kde

$$F_x = F_0 \sin \omega t.$$

spočtete jeho zrychlení, okamžitou, maximální, minimální a průměrnou rychlost a polohu hmotného bodu.

Řešení: Jelikož je na počátku hmotný bod v klidu a síla působí jen podél osy x , bude platit $a_y = a_z = 0$, $v_y = v_z = 0$, $y = z = 0$.

Pro x -ovou složku zrychlení dostaneme

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} \Rightarrow a_x = \frac{F_x}{m} = \frac{F_0}{m} \sin \omega t.$$

Pro x -ovou složku rychlosti dostaneme

$$v_x = \int a_x dt = \frac{F_0}{m} \int \sin \omega t dt = -\frac{F_0}{\omega m} \cos \omega t + K,$$

kde K je integrační konstanta, kterou určíme z počátečních podmínek. Jelikož $v_x(0) = 0$, bude platit

$$0 = -\frac{F_0}{\omega m} + K \Rightarrow K = \frac{F_0}{\omega m} \Rightarrow v_x = \frac{F_0}{\omega m}(1 - \cos \omega t).$$

Pro maximální a minimální rychlost hmotného bodu postupně dostaneme

$$v_{x\max} = \frac{2F_0}{\omega m} \text{ pro } t = (2k+1)\frac{\pi}{\omega}, \quad v_{x\min} = 0 \text{ pro } t = \frac{2k\pi}{\omega}, \quad \text{kde } k = 0, 1, 2, \dots$$

Jelikož střední hodnota funkce kosinus je nulová, bude pro průměrnou rychlost platit

$$\overline{v_x} = \frac{F_0}{\omega m}.$$

Pro polohu hmotného bodu bude platit

$$x = \int v_x dt = \frac{F_0}{\omega m} \int (1 - \cos \omega t) dt = \frac{F_0}{\omega m} \left(t - \frac{1}{\omega} \sin \omega t \right) + K,$$

kde integrační konstantu K opět určíme z počátečních podmínek

$$x(0) = 0 \Rightarrow 0 = K \Rightarrow x = \frac{F_0}{\omega^2 m} (\omega t - \sin \omega t).$$

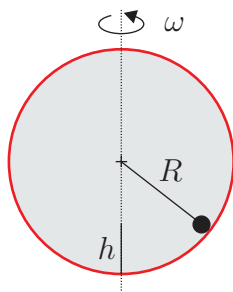
■ Příklad 3.9: Lod'

Lod' se vlivem odporu prostředí pohybovala po jezeře přímočaře zpomaleně, přičemž pro velikost její rychlosti platil vztah

$$v = c^2(t - t_z)^2, \quad c > 0, \quad t \in \langle 0, t_z \rangle,$$

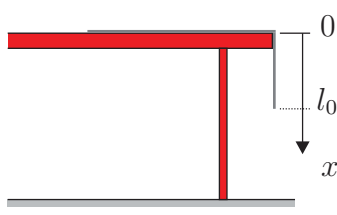
kde c je konstanta a t_z je čas, kdy se zastavila. Vypočítejte, jak závisí odporová síla, která lod' zabrzdila, na rychlosti.

■ Příklad 3.10: Odstředivka



Odstředivka (viz obrázek) má tvar duté koule o poloměru R a otáčí se kolem své osy úhlovou rychlostí ω . V jaké výšce h se ustálí malá kulička a jakou silou působí na stěnu odstředivky?

Příklad 3.11: Lano na stole



Dokonale ohebné lano délky l a hmotnosti m leží na desce stolu, přičemž jeho část délky l_0 visí přes okraj dolů. Nalezněte časovou závislost polohy konce lana a jeho rychlosti za předpokladu, že lano po stole může klouzat bez tření a jeho rychlost v čase $t = 0$ je nulová. Omezte se na situaci, kdy část lana ještě spočívá na stole a lano se ještě nedotýká podlahy.

Řešení: Úloha je jednorozměrná, kladný směr nechť míří dolů (viz obrázek). Tíhová síla urychlující lano souvisí pouze s hmotou lana, která visí ze stolu dolů, platí pro ni tedy

$$F_{\text{gu}} = mg \frac{x}{l},$$

zatímco setrvačnou hmotností je hmotnost celého lana m . Pohybová rovnice má tedy tvar

$$ma = F_{\text{gu}} \Rightarrow m\ddot{x} = mg \frac{x}{l} \Rightarrow \ddot{x} - \frac{g}{l}x = 0. \quad (1)$$

Jedná se o obyčejnou homogenní lineární diferenciální rovnici s konstantními koeficienty, jejíž řešení vždy hledáme ve tvaru

$$x(t) = e^{\lambda t}.$$

Dosazením do rovnice (1) dostaneme

$$\lambda^2 e^{\lambda t} - \frac{g}{l} e^{\lambda t} = 0 \Rightarrow \left(\lambda^2 - \frac{g}{l} \right) e^{\lambda t} = 0 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{g}{l},$$

kde poslední rovnice představuje tzv. charakteristickou rovnici. Pro kořeny charakteristické rovnice platí

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Obecné řešení rovnice (1) píšeme jako lineární kombinaci řešení, kam dosadíme kořeny charakteristické rovnice, takže bude platit

$$x(t) = Ae^{\sqrt{g/l}t} + Be^{-\sqrt{g/l}t}, \quad (2)$$

kde A a B jsou integrační konstanty, jejichž hodnotu určíme z počátečních podmínek v čase $t = 0$ dosazením do obecného řešení (2):

$$\begin{aligned} x(0) = l_0 &\Rightarrow Ae^0 + Be^0 = l_0 \Rightarrow A + B = l_0 \\ v(0) = \dot{x}(0) = 0 &\Rightarrow \sqrt{\frac{g}{l}}Ae^0 - \sqrt{\frac{g}{l}}Be^0 = 0 \Rightarrow A - B = 0. \end{aligned}$$

Vyřešením získané soustavy algebraických rovnic dostaneme $A = B = l_0/2$, takže vztah pro polohu konce lana a jeho rychlost má tvar

$$x(t) = \frac{l_0}{2} (e^{\sqrt{g/l}t} + e^{-\sqrt{g/l}t}) = l_0 \cosh \sqrt{\frac{g}{l}}t, \quad v(t) = \dot{x}(t) = l_0 \sqrt{\frac{g}{l}} \sinh \sqrt{\frac{g}{l}}t.$$

**Příklad 3.12: Parašutista**

Vypočítejte rychlost, kterou dopadne parašutista z velké výšky s nulovou počáteční rychlostí na zem za předpokladu, že se mu padák otevře a neotevře. Vypočítejte, z jaké výšky by musel vyskočit, aby stejnou rychlostí dopadl na zem, kdybychom mohli odpor vzduchu zanedbat. Vypočítejte závislost rychlosti parašutisty na čase.

Víme že síla, kterou působí tekutina na rychle se pohybující těleso, se dá vyjádřit Newtonovým vzorcem

$$\mathbf{F}_o = -\frac{1}{2}C\rho S|\mathbf{v}|\mathbf{v},$$

kde S je čelní průřez obtékaného tělesa, \mathbf{v} je jeho rychlost, ρ je hustota tekutiny (pro vzduch $\rho = 1,2 \text{ kg m}^{-3}$) a C je koeficient závislé na tvaru tělesa. Pro otevřený padák budeme předpokládat $C_o = 1,33$, $S_o = 50 \text{ m}^2$, pro parašutistu s neotevřeným padákem $C_n \approx 1$, $S_n \approx 1 \text{ m}^2$. Hmotnost parašutisty i s výstrojí je $m = 80 \text{ kg}$.

Řešení: Pohybová rovnice má tvar

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_o.$$

kde \mathbf{F}_g je síla tíhová (parašutistu urychluje) a \mathbf{F}_o je síla odporu prostředí (parašutistu brzdí). Pokud budeme předpokládat, že počáteční rychlost parašutisty je nulová, úloha se stává jednorozměrnou a pokud kladný směr souřadnice míří dolů, můžeme pohybovou rovnici přepsat do tvaru

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \frac{1}{2}C\rho S v^2. \quad (1)$$

Rovnice (1) říká, že změna rychlosti je úměrná rozdílu síly tíhové a odporové. Na počátku je maximální (odporová síla je nulová), s narůstající rychlostí parašutisty roste i odporová síla až do okamžiku, kdy se její velikost rovná velikosti síly tíhové. Od tohoto okamžiku je výslednice sil působících na parašutistu nulová a ten padá konstantní rychlostí v_{\max} , kterou spočteme jako

$$\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow mg - \frac{1}{2}C\rho S v_{\max}^2 = 0 \Rightarrow v_{\max} = \sqrt{\frac{2mg}{C\rho S}}.$$

Odtud dosazením číselných hodnot obdržíme rychlost dopadu při otevřeném padáku $v_o = 4,4 \text{ m s}^{-1}$ a při neotevřeném padáku pak $v_n = 36 \text{ m s}^{-1}$. Dosazením do vzorce

$$h = \frac{v^2}{2g}$$

dostaneme výšky, z nichž bychom dostali vypočtené rychlosti dopadu při nulovém odporu vzduchu $h_o = 1 \text{ m}$, $h_n = 67 \text{ m}$.

Závislost rychlosti parašutisty na čase dostaneme řešením diferenciální rovnice (1). Tu můžeme přepsat do tvaru

$$\frac{dv}{dt} = g(1 - \alpha v^2), \quad \text{kde } \alpha = \frac{C\rho S}{2mg}$$

a následně řešit separací proměnných

$$\frac{dv}{1 - \alpha v^2} = g dt \Rightarrow \int_0^v \frac{dx}{1 - \alpha x^2} = \int_0^t g dy.$$

Integrál nalevo spočteme pomocí substituce

$$\int_0^v \frac{dx}{1-\alpha x^2} = \left| \begin{array}{l} y = \sqrt{\alpha}x, \quad dy = \sqrt{\alpha}dx, \\ x = 0 \rightarrow y = 0, \\ x = v \rightarrow y = \sqrt{\alpha}v \end{array} \right| = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_0^{\sqrt{\alpha}v} \frac{dy}{1-y^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \left[\operatorname{arctanh} y \right]_0^{\sqrt{\alpha}v} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{arctanh} \sqrt{\alpha}v,$$

takže dostaneme

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{arctanh} \sqrt{\alpha}v = gt \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \tanh \sqrt{\alpha}gt.$$

Rychlost parašutisty jako funkci času tedy můžeme psát ve tvaru

$$v = \sqrt{\frac{2mg}{C\rho S}} \tanh \sqrt{\frac{C\rho Sg}{2m}} t.$$

■ **Příklad 3.13: Kulička v oleji**

Vhodíme-li malou kuličku (brok) do vazké kapaliny, např. oleje, bude její pohyb brzdit třecí (Stokesova) síla \mathbf{F}_S , jejíž velikost je úměrná rychlosti pohybu a kterou můžeme vyjádřit vzorcem

$$\mathbf{F}_S = -k\mathbf{v}, \quad k > 0.$$

Vypočítejte závislost rychlosti kuličky o hmotnosti m na čase, pokud pro $t = 0$ je její rychlost nulová a můžeme-li zanedbat vztlak kapaliny.

■ **Příklad 3.14: Brzdění silou přímo úměrnou rychlosti**

Na jaké dráze se zastaví kulička o hmotnosti m , která se pohybuje po dokonale hladké vodorovné ploše, působí na ni pouze síla

$$\mathbf{F}_S = -k\mathbf{v}, \quad k > 0$$

a v určitém čase je velikost její rychlosti v_0 ?

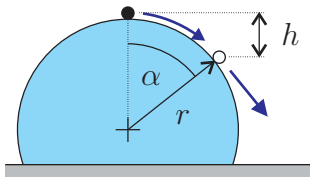
■ **Příklad 3.15: Brzdění silou úměrnou druhé mocnině rychlosti**

Na jaké dráze se zastaví kulička o hmotnosti m , která se pohybuje po dokonale hladké vodorovné ploše, působí na ni pouze síla

$$\mathbf{F}_S = -k|\mathbf{v}|\mathbf{v}, \quad k > 0$$

a v určitém čase je velikost její rychlosti v_0 ?

Příklad 3.16: Kulička na kouli



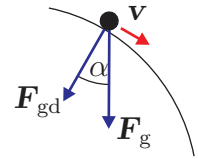
Na vrcholku velké dokonale hladké koule o poloměru r je umístěna malá kulička, jejíž poloměr můžeme oproti poloměru velké koule zcela zanedbat. Malá kulička se díky labilní rovnováze dá do pohybu a klouže po povrchu velké koule. Určete vertikální vzdálenost h , ve které se od povrchu velké koule odlepí, a vypočítejte jakou dráhu po povrchu koule urazí.

Řešení: Klouže-li malá kulička po velké kouli, vykonává pohyb po kružnici o poloměru r a velikost jejího dostředivého zrychlení je

$$a_d = \frac{v^2}{r},$$

kde v je velikost rychlosti kuličky. Toto dostředivé zrychlení je vynuceno působením dostředivé síly, kterou realizuje příslušná složka \mathbf{F}_{gd} síly tíhové, viz obrázek, pro jejíž velikost platí

$$F_{gd} = F_g \cos \alpha = mg \cos \alpha.$$



Z výše uvedeného je zřejmé, že v okamžiku, kdy

$$m \frac{v^2}{r} > mg \cos \alpha,$$

nebude dostředivá složka tíhové síly dostatečně velká (pro pohyb rychlostí v po kružnici o poloměru r) a kulička se odlepí. Tak se stane v okamžiku, kdy bude platit

$$v^2 = gr \cos \alpha. \quad (1)$$

Velikost rychlosti kuličky v závislosti na vertikální vzdálenosti h získáme ze zákona zachování energie. Jelikož rychlost kuličky na vršku koule je prakticky nulová a hladinu nulové potenciální energie si můžeme nadefinovat rovněž na vršku koule, dostaneme

$$0 + 0 = \frac{1}{2}mv^2 - mgh \quad \Rightarrow \quad v^2 = 2gh.$$

Protože platí

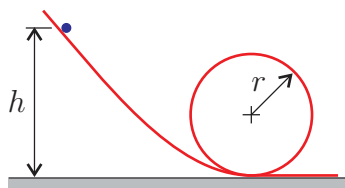
$$\cos \alpha = \frac{r - h}{r},$$

dostaneme dosazením tohoto a předchozího vztahu do vztahu (1) vertikální vzdálenost místa odlepení kuličky od vršku koule ve tvaru

$$h = \frac{r}{3}.$$

Délku dráhy, kterou kulička urazí po povrchu koule dostaneme jako

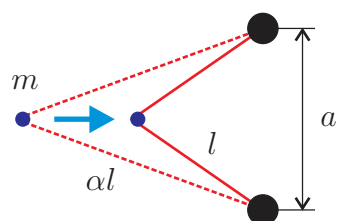
$$s = r\alpha = r \arccos \left(\frac{r - h}{r} \right) = r \arccos \frac{2}{3}.$$

Příklad 3.17: Nebezpečný kousek

Artista na cirkusovém představení předvádí následující nebezpečný kousek, viz obrázek. Z výšky h se na koloběžce spustí na kruhovou dráhu o poloměru r . Jaká musí minimálně tato výška být, aby po celou dobu jízdy byl v kontaktu s dráhou? Přitom předpokládejte, že počáteční rychlost je nulová.

Příklad 3.18: Houpačka

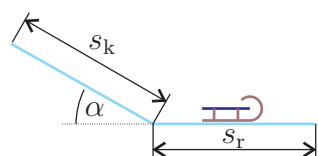
Houpačka, kterou můžeme zjednodušeně popsat jako hmotný bod o hmotnosti m zavěšený na nehmotném závěsu o délce l , byla vychýlena do úhlu φ_0 a puštěna. Vypočítejte závislost velikosti rychlosti houpačky na okamžité výchylce φ a její maximální hodnotu. Vypočítejte velikost síly napínající závěs houpačky v závislosti na výchylce a její maximální hodnotu.

Příklad 3.19: Prak

Prak si můžeme vyrobit tak, že mezi dvě ramena vidlice s roztečí a připevníme gumové vlákno délky $l > a$ a tuhosti k . Jakou počáteční rychlostí v_0 vymrští tento prak kámen o hmotnosti m , pokud gumové vlákno natáhneme na délku $l' = \alpha l$, $\alpha > 1$ a pokud jeho hmotnost oproti hmotnosti kamene můžeme zanedbat?

Příklad 3.20: Pružinový kanón

Pokud na svisle postavenou pružinu umístíme kuličku o hmotnosti $m = 0,1$ kg, stlačí se o vzdálenost $\Delta s = 2$ mm. Do jaké výšky pružina kuličku kolmo vzhůru vystřelí, pokud ji dále stlačíme o $s_1 = 15$ cm a náhle pustíme? Hmotnost pružiny můžeme zanedbat.

Příklad 3.21: Sáňky

Sáňky sjedou s kopce délky s_k a sklonem α a po vodorovné rovině ujedou ještě vzdálenost s_r . Vypočítejte koeficient smykového tření μ mezi sněhem a sáňkami za předpokladu, že velikost rychlosti ve zlomu mezi kopcem a rovinou se nezmění.

Řešení: Na vršku kopce mají sáňky oproti vodorovné rovině potenciální energii

$$E_p = mgh = mgs_k \sin \alpha.$$

Tato potenciální energie se sjetím kopce částečně využije na zvýšení kinetické energie sáněk a částečně ji spotřebuje třecí síla brzdící sáňky. Ty budou mít těsně pod kopcem kinetickou energii

$$E_k = E_p - A_{tk} = mgs_k \sin \alpha - \mu mgs_k \cos \alpha = mgs_k(\sin \alpha - \mu \cos \alpha),$$

kde A_{tk} je práce, kterou sáňky při sjíždění kopce spotřebují na překonávání třecí síly. Kinetická energie se na rovině zcela využije na překonání třecí síly, takže bude platit

$$E_p = \mu m g s_r.$$

Porovnáním předchozích dvou vztahů dostaneme výsledek

$$m g s_k (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) = \mu m g s_r \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{s_k \sin \alpha}{s_r + s_k \cos \alpha}.$$

■ **Příklad 3.22: Je řidič vinen?**

V obci, kde je povolená maximální rychlost $v_{\text{max}} = 50 \text{ km h}^{-1}$ přejelo auto slepici. Na silnici jsou vidět stopy po brzdění smykem, které mají délku $l = 39 \text{ m}$. Policista vyšetřující nehodu ví, že koeficient smykového tření mezi vozovkou a pneumatikami je $\mu = 0,5$. Jakou jel automobil rychlostí v okamžiku, než začal brzdit? Dostane řidič pokutu?

■ **Příklad 3.23: Odpojený vagón**

Po vodorovné trati jede vlak hmotnosti M konstantní rychlostí o velikosti v_0 až do okamžiku, kdy se v čase $t = 0$ od něj odpojí poslední vagón o hmotnosti m . Vypočítejte, jakou vzdálenost Δs má odpojený vagón od konce vlaku v okamžiku, kdy se zastaví. Předpokládejte, že jednotlivé součásti vlaku jsou brzděny třecí silou úměrnou jejich tíze a lokomotiva vyvíjí stále stejnou tažnou sílu.

■ **Příklad 3.24: Střela**

Střela letící rychlostí $v = 400 \text{ m s}^{-1}$ narazí do dřevěného kvádra a zasekne se v něm v hloubce $h = 30 \text{ cm}$. Jakou rychlostí v' by vylétla tato střela z kvádra ze stejného materiálu o tloušťce $h' = 15 \text{ cm}$? Předpokládejte přitom, že odporová síla, kterou dřevo střelu brzdí, je konstantní.

■ **Příklad 3.25: Kabel visící ze střechy domu**

Jakou práci je třeba vykonat na vytažení kabelu, který volně visí ze střechy domu, má délku $l = 20 \text{ m}$ a hmotnost $m = 30 \text{ kg}$?

Řešení: Při vytahování kabelu na střechu je třeba překonávat tíhu visící části kabelu. Jestliže již bylo vytaženo x metrů kabelu, platí pro tíhu jeho visící části

$$F_{\text{gv}} = m g \frac{l - x}{l}.$$

Pro celkovou vykonanou práci dostaneme

$$A = \int (-\mathbf{F}_{\text{gv}}) \cdot d\mathbf{r} = \int_0^l F_{\text{gv}} dx = \frac{m g}{l} \int_0^l (l - x) dx = \frac{m g}{l} \left[lx - \frac{x^2}{2} \right]_0^l = \frac{m g l}{2}.$$

Dosazením číselných hodnot dostaneme $A = 2943 \text{ J}$.

■ Příklad 3.26: Provázek

Provázek délky l a hmotnosti m leží natažený na stole. Jakou délkou x musí viset přes okraj stolu, aby se právě dal vlastní vahou do pohybu, jestliže koeficient smykového tření mezi ním a stolem je μ ? Jakou práci vykoná tíhová síla při stažení provázku ze stolu?

■ Příklad 3.27: Výstřel z děla

Dělová koule o hmotnosti $m = 24 \text{ kg}$ opustila hlaveň rychlostí o velikosti $v = 500 \text{ m s}^{-1}$ v čase $\tau = 0,008 \text{ s}$ po zapálení roznětky. Jak velká síla na kouli působila, jestliže předpokládáme rovnoměrně zrychlený pohyb koule v hlavni? Jak velká práce byla vykonána na urychlení koule a jak dlouhá je hlaveň?

■ Příklad 3.28: Úder kladivem

Kladivo udeřilo do předmětu o hmotnosti $m = 0,5 \text{ kg}$, přičemž mu udělilo rychlost $v = 0,3 \text{ m s}^{-1}$. Vypočítejte maximální velikost síly, jíž kladivo na předmět působilo za předpokladu, že velikost síly lineárně narůstala a pak klesala a úder trval $\tau = 1 \text{ ms}$.

Řešení: Časově proměnná síla udělí tělesu impuls, který změní jeho hybnost

$$\int_0^\tau \mathbf{F}(t) dt = \mathbf{I} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1.$$

Jelikož je počáteční rychlost (a tedy i hybnost) tělesa nulová a síla působí po přímce (z nedostatku dalších informací to musíme předpokládat), můžeme psát

$$p = \int_0^\tau F(t) dt, \quad (1)$$

kde příslušné skalární veličiny nejsou velikosti, ale složky vektorů ve směru přímky, podél níž síla působí. Jelikož síla lineárně narůstá k maximální hodnotě F_{\max} a pak opět stejně klesá, můžeme pro ni psát

$$F(t) = \begin{cases} 2F_{\max}t/\tau, & t \in \langle 0, \tau/2 \rangle, \\ 2F_{\max}(1 - t/\tau), & t \in \langle \tau/2, \tau \rangle, \\ 0, & \text{jinde.} \end{cases}$$

Integrál na pravé straně rovnice (1) spočteme jako

$$\int_0^\tau F(t) dt = \int_0^{\tau/2} F(t) dt + \int_{\tau/2}^\tau F(t) dt = 2 \int_0^{\tau/2} F(t) dt = \frac{4F_{\max}}{\tau} \int_0^{\tau/2} t dt = \frac{F_{\max}\tau}{2}$$

a dosazením zpět dostaneme hledanou hodnotu maximální síly

$$mv = \frac{F_{\max}\tau}{2} \quad \Rightarrow \quad F_{\max} = \frac{2mv}{\tau} = 300 \text{ N}.$$

■ Příklad 3.29: Špatný zpěvák

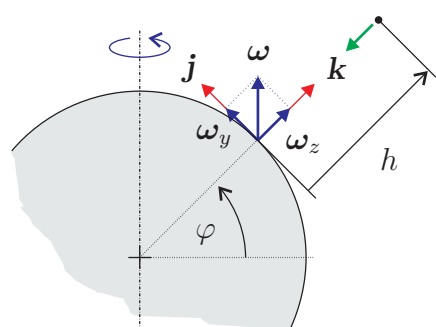
Zpěvák stojí na pódiu a diváci na něj hází rajčata. Na jeho nebohé tělo dopadají kolmo rychlostí o velikosti $v = 10 \text{ m s}^{-1}$ v průměru 10 rajčat o hmotnosti $m = 100 \text{ g}$ za jednu sekundu. Jaká průměrná síla nutí zpěváka opustit hlediště?

■ Příklad 3.30: Pád z výšky na rotující Zemi

Z věže výšky h stojící na místě o zeměpisné šířce φ byla na zem upuštěna malá kulička. Vypočítejte, jakým směrem a v jaké vzdálenosti od vertikály dopadne na zem působením Coriolisovy síly. Vliv tření o vzduch zanedbejte. Jaké výchylky můžeme očekávat v případě mrakodrapu Tchaj-pej 101, Eiffelovy věže či Petřínské rozhledny?

Nápověda: Vliv Coriolisovy síly v tomto případě bude velice malý a v prvním přiblížení můžeme uvažovat, že se kulička ve vertikálním směru pohybuje volným pádem.

Řešení:



Nejdříve si zavedeme místní **pravotočivou** vztažnou soustavu, která rotuje spolu se Zemí, čímž je neinerciální. Osa x nechť míří na východ, osa y na sever a osa z (aby V.S. byla pravotočivá) vzhůru. Na kuličku budou působit dvě síly, tíhová \mathbf{F}_g a Coriolisova \mathbf{F}_C . Pohybová rovnice popisující pohyb kuličky tedy bude mít tvar

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_C. \quad (1)$$

S ohledem na zavedení souřadnic bude mít vektor tíhové síly složky

$$\mathbf{F}_g = (0, 0, -mg).$$

Pro Coriolisovu sílu platí

$$\mathbf{F}_C = 2m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}.$$

Vektor úhlové rychlosti má v námi zavedené vztažné soustavě složky

$$\boldsymbol{\omega} = (0, \omega \cos \varphi, \omega \sin \varphi).$$

Rovnice (1) tvoří soustavu tří obyčejných diferenciálních rovnic, jejímuž plnému řešení se vyhneme následující úvahou.

Pro velikost úhlové rychlosti otáčení Země kolem své osy platí $\omega = 2\pi/T \approx 7.3 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$, kde $T = 24 \text{ h}$ je perioda rotace. Kdyby kulička padala řekněme z výšky $h = 500 \text{ m}$ a neuvažovali bychom Coriolisovu sílu, dostali bychom pro rychlost dopadu $v_d = \sqrt{2gh} \approx 99 \text{ m s}^{-1}$. Kdybychom tuto rychlost a úhlovou rychlost rotace dosadili do vzorce pro Coriolisovu sílu, dostali bychom maximální velikost zrychlení způsobeného Coriolisovou silou jako $a_C \approx 2\omega v_d \approx 0.014 \text{ m s}^{-2}$, což je zrychlení cca $700\times$ menší, než je velikost tíhového zrychlení g .

Z tohoto důvodu můžeme úlohu přibližně vypočítat takto. Nejdříve vyšetříme volný pád z výšky h s počátečními podmínkami v čase $t = 0$

$$\mathbf{r}_0 = (0, 0, h), \quad \mathbf{v}_0 = (0, 0, 0).$$

Postupně dostaneme

$$\mathbf{a} = (0, 0, -g), \quad \mathbf{v} = (0, 0, -gt), \quad \mathbf{r} = \left(0, 0, h - \frac{1}{2}gt^2\right),$$

odkud zjistíme z podmínky $z(t_p) = 0$ dobu pádu $t_p = \sqrt{2h/g}$.

Trajektorie volného pádu je slabě narušena působením Coriolisovy síly. Dosadíme-li do vzorce pro Coriolisovu sílu výše vypočtenou rychlost, dostaneme

$$\mathbf{F}_C = 2m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} = 2m \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix} = 2m \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & -gt \\ 0 & \omega \cos \varphi & \omega \sin \varphi \end{vmatrix} = (2m\omega g t \cos \varphi) \mathbf{i}.$$

Jelikož osa x míří na východ a všechny veličiny v závorce jsou kladné, míří Coriolisova síla na východ a tímto směrem se kulička vychýlí. Pro velikost této výchylky postupně dostaneme

$$m \frac{dv_x}{dt} = 2m\omega g t \cos \varphi \quad \Rightarrow \quad v_x = 2\omega g \cos \varphi \int_0^t \tau d\tau = \omega g t^2 \cos \varphi.$$

Dále pak

$$v_x = \frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad x = \omega g \cos \varphi \int_0^t \tau^2 d\tau = \frac{1}{3} \omega g t^3 \cos \varphi.$$

Pokud za čas dosadíme okamžik dopadu t_p , dostaneme vzdálenost dopadu kuličky od vertikály ve tvaru

$$x_d = \frac{1}{3} \omega g t_d^3 \cos \varphi = \frac{1}{3} \omega g \left(\frac{2h}{g} \right)^{3/2} \cos \varphi.$$

Numerické výsledky:

budova	h	φ	x_d
mrakodrap Tchaj-pej 101	508 m	25°	22,7 cm
Eiffelova věž	300 m	48°	7,6 cm
Petřínská rozhledna	60 m	50°	6,5 mm

■ **Příklad 3.31: Řeka**

Na severní zeměpisné šířce $\varphi = 45^\circ$ teče od severu k jihu řeka široká $d = 1$ km rychlostí $v = 5 \text{ km h}^{-1}$. Vypočítejte, jaké převýšení vodní hladiny mezi pravým a levým břehem Δh způsobí Coriolisova síla.

Nápověda: Vodní hladina je kolmá k výslednici působících sil.

■ **Příklad 3.32: Závaží na horizontálně kmitající desce**

Vodorovná deska koná kmitavý pohyb v horizontálním směru s periodou $T = 5$ s. Závaží ležící na desce se začne smýkat v okamžiku, kdy amplituda kmitů dosáhne velikosti $x_0 = 0,5$ m. Jaký je koeficient smykového tření μ mezi závažím a deskou?

■ **Příklad 3.33: Závaží na vertikálně kmitající desce**

Závaží o hmotnosti $m = 2$ kg leží na vertikálně kmitající desce, jejíž amplituda výchylky $z_0 = 3$ cm a perioda $T = 0,5$ s. Jaká maximální síla působí na závaží? Pro jakou maximální amplitudu kmitů z_m bude při stejné periodě závaží na desce ještě v klidu ležet?

Příklad 3.34: Těleso zavěšené na pružině

Zavěsíme-li těleso o hmotnosti $m = 200 \text{ g}$ na pružinu, prodlouží se pružina o $\Delta y_0 = 3,9 \text{ cm}$. Poté pružinu s tělesem prodloužíme o $\Delta y = 2 \text{ cm}$ ve vertikálním směru a pustíme. S jakou periodou bude těleso kmitat? Jaká bude jeho maximální rychlost a zrychlení?

Řešení: Pro pružinu řídící se Hookovým zákonem pro velikost působící síly F a prodloužení Δy platí vztah $F = k\Delta y$, takže pro tuhost pružiny k dostaneme

$$k = \frac{mg}{\Delta y_0} = 50,3 \text{ N m}^{-1}.$$

Vychýlíme-li dále těleso vertikálně z rovnovážné polohy o \mathbf{y} , bude na něj působit vratná síla

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{y}.$$

Pohybová rovnice tedy bude mít tvar

$$m \frac{d^2 \mathbf{y}}{dt^2} = -k\mathbf{y}, \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{k}{m}y = 0,$$

kde y je složka vektoru výchylky ve vertikálním směru (úloha je jednorozměrná). Budeme hledat obecné řešení ve tvaru $\tilde{y} = \exp(\lambda t)$, takže dosazením do diferenciální rovnice dostaneme

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + \frac{k}{m} e^{\lambda t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 = -\frac{k}{m} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm i \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \Rightarrow \quad \tilde{y}_{1,2} = \exp\left(\pm i \sqrt{\frac{k}{m}} t\right).$$

Obecné řešení je tvořeno lineární kombinací nalezených funkcí, takže platí

$$y = A \exp\left(i \sqrt{\frac{k}{m}} t\right) + B \exp\left(-i \sqrt{\frac{k}{m}} t\right) = C \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) + D \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right).$$

Integrační konstanty určíme z počátečních podmínek v čase $t = 0$: $y(0) = \Delta y$, $v(0) = \dot{y}(0) = 0$. Vypočteme rychlost

$$v = \frac{dy}{dt} = C \sqrt{\frac{k}{m}} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) - D \sqrt{\frac{k}{m}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right)$$

a do posledních dvou vztahů dosadíme počáteční podmínky

$$\Delta y = D, \quad 0 = C,$$

takže pro výchylku, rychlost a zrychlení závaží můžeme psát

$$y = \Delta y \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right), \quad v = -\Delta y \sqrt{\frac{k}{m}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right), \quad a = \frac{dv}{dt} = -\Delta y \frac{k}{m} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right).$$

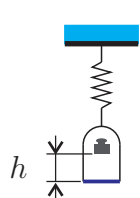
Kmitavý pohyb závaží je periodický a pro jeho periodu platí

$$\sqrt{\frac{k}{m}} T = 2\pi \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{\Delta y_0}{g}} = 0,396 \text{ s}.$$

Pro amplitudy rychlosti a zrychlení platí

$$v_0 = \Delta y \sqrt{\frac{g}{\Delta y_0}} = 0,317 \text{ m s}^{-1}, \quad a_0 = g \frac{\Delta y}{\Delta y_0} = 5,03 \text{ m s}^{-2}.$$

■ Příklad 3.35: Pád závaží na misku na pružině



Zavěsíme-li na volně visící pružinu misku o hmotnosti m , pružina se prodlouží o délku Δl . Na misku z výšky h pustíme závaží o stejné hmotnosti m . Vypočítejte, s jakou amplitudou A_0 začne miska se závažím po dopadu kmitat. Hmotnost pružiny zanedbejte a srážku závaží s miskou považujte za dokonale nepružnou.

■ Příklad 3.36: Jedno závaží na dvou pružinách

Máme dvě pružiny stejné délky s různými tuhostmi k_1 a k_2 . Zavěsíme-li těleso neznámé hmotnosti na pružinu s tuhostí k_1 , kmitá na ní s periodou T_1 . Na pružině s tuhostí k_2 kmitá toto těleso s periodou T_2 . Vypočítejte, s jakou periodou T_s a T_p bude těleso kmitat, když jej **a**) zavěsíme na obě pružiny zapojené pod sebe (sériově) a **b**) vedle sebe (paralelně).

■ Příklad 3.37: Bungee jump

Odvážlivec o hmotnosti m se vrhne střemhlav z mostu zavěšen na pružném laně, které má nezatížené délku l_0 a tuhost k . Vypočítejte, na jakou délku se lano maximálně natáhne, pokud zanedbáte odpor vzduchu, hmotnost lana a pokud budete předpokládat, že lano se řídí Hookovým zákonem (velikost vratné síly je přímo úměrná prodloužení).

■ Příklad 3.38: Perioda kmitů z průběhu potenciální energie

Částice o hmotnosti m , která se může pohybovat pouze po přímce, se nachází v jakémisi fyzikálním poli, v němž má potenciální energii vyjádřenou vztahem

$$E_p = E_0 \left(\frac{a}{x} + \frac{x}{a} \right), \quad E_0, a > 0,$$

kde x je její poloha. Zjistěte, zda v tomto poli existuje stabilní rovnovážný bod a pokud ano, s jakou periodou by částice vykonávala malé kmity kolem tohoto rovnovážného bodu.

Řešení: Nejdříve najdeme stacionární body potenciální energie

$$\frac{dE_p}{dx} = E_0 \left(-\frac{a}{x^2} + \frac{1}{a} \right) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x_s = \pm a.$$

Vypočteme druhou derivaci

$$\frac{d^2 E_p}{dx^2} = \frac{2aE_0}{x^3}.$$

Druhá derivace je pro $x_s = -a$ záporná, jedná se tedy o lokální maximum a bod labilní rovnováhy, pro bod $x_s = a$ je druhá derivace kladná, jedná se tedy o lokální minimum a bod stabilní rovnováhy.

Provedeme Taylorův rozvoj potenciální energie kolem bodu $x_s = a$. Můžeme psát

$$E_p(x) \approx E_p(x_s) + \left. \frac{dE_p}{dx} \right|_{x=x_s} (x - x_s) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2E_p}{dx^2} \right|_{x=x_s} (x - x_s)^2 = 2E_0 + \frac{E_0}{a^2} (x - a)^2.$$

Tímto jsme průběh potenciální energie kolem lokálního minima (stabilního rovnovážného bodu) aproximovali parabolou (vyšší členy Taylorova rozvoje jsme zanedbali). Pro sílu působící na částici tedy platí

$$F(x) = -\frac{dE_p}{dx} \approx -\frac{2E_0}{a^2} (x - a).$$

Zavedeme-li novou souřadnici $y = x - a$, můžeme pro částici psát pohybovou rovnici ve tvaru

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = m \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{2E_0}{a^2} y \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{2E_0}{ma^2} y = 0.$$

Poslední rovnice reprezentuje rovnici lineárního harmonického oscilátoru. Částice tedy kolem rovnovážného bodu vykonává kmity, pro jejichž kruhový kmitočet a periodu platí

$$\omega_0^2 = \frac{2E_0}{ma^2} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{ma^2}{2E_0}}.$$

Vzorec platí pouze za předpokladu, že částice se pohybuje pouze blízko lokálního minima potenciální energie, kde lze potenciální energii s dostatečnou přesností aproximovat parabolou.

● **Příklad 3.39: Perioda kmitů z průběhu síly**

Na částici o hmotnosti m , jejíž pohyb je omezen na přímočarý, v jistém fyzikálním poli působí síla, pro jejíž složku ve směru dané přímky platí

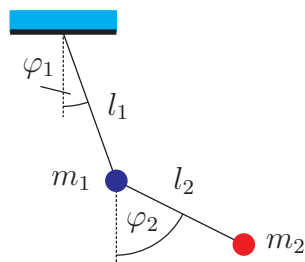
$$F(x) = -F_0 \sinh(ax), \quad \text{kde } F_0, a > 0,$$

kde x je poloha částice. Najděte periodu malých kmitů, které může částice vykonávat kolem rovnovážného bodu.

4. Lagrangeovy rovnice II. druhu



Příklad 4.1: Dvojité kyvadlo



Matematické kyvadlo o délce závěsu l_2 a hmotnosti m_2 je zavěšeno na matematické kyvadlo o délce závěsu l_1 a hmotnosti m_1 . Najděte pohybové rovnice pro takovéto dvojité kyvadlo za předpokladu, že obě kyvadla se mohou pohybovat pouze v jedné rovině.

Řešení: Pro souřadnice koncových bodů jednotlivých kyvadel platí

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \sin \varphi_1, \\ y_1 &= -l_1 \cos \varphi_1 \\ x_2 &= x_1 + l_2 \sin \varphi_2 = l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2, \\ y_2 &= y_1 - l_2 \cos \varphi_2 = -l_1 \cos \varphi_1 - l_2 \cos \varphi_2. \end{aligned}$$

Celkovou kinetickou energii vypočteme pomocí vzorce

$$E_k = \frac{1}{2}m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2),$$

kam dosadíme za jednotlivé derivace

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= l_1 \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1, & \dot{x}_2 &= l_1 \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 + l_2 \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2, \\ \dot{y}_1 &= l_1 \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1, & \dot{y}_2 &= l_1 \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 + l_2 \dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2, \end{aligned}$$

takže po drobných úpravách dostaneme

$$E_k = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 [l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Pro celkovou potenciální energii můžeme psát

$$E_p = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 = -(m_1 + m_2)g l_1 \cos \varphi_1 - m_2 g l_2 \cos \varphi_2.$$

Pro Lagrangeovu funkci $\mathcal{L} = E_k - E_p$ tedy platí

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 [l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)] + \\ &\quad + (m_1 + m_2)g l_1 \cos \varphi_1 + m_2 g l_2 \cos \varphi_2. \end{aligned}$$

Pohybové rovnice najdeme pomocí Lagrangeových rovnic II. druhu

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2,$$

kam za zobecněné souřadnice dosadíme $q_1 = \varphi_1$, $q_2 = \varphi_2$ a za zobecněné rychlosti $\dot{q}_1 = \dot{\varphi}_1$, $\dot{q}_2 = \dot{\varphi}_2$, takže dostaneme soustavu

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_1} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_2} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_2} = 0. \quad (1)$$

Vypočítáme postupně jednotlivé derivace

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_1} = -m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - (m_1 + m_2) g l_1 \sin \varphi_1,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_2} = m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - m_2 g l_2 \sin \varphi_2,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_1} = (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\varphi}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2),$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_2} = m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2),$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) = (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\varphi}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_2 (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) \sin(\varphi_1 - \varphi_2),$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_2} \right) = m_2 l_2^2 \ddot{\varphi}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) \sin(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Dosazením vypočtených derivací do soustavy (1) dostaneme hledané pohybové rovnice

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\varphi}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + \\ + (m_1 + m_2) g l_1 \sin \varphi_1 &= 0, \\ m_2 l_2^2 \ddot{\varphi}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + m_2 g l_2 \sin \varphi_2 &= 0. \end{aligned}$$

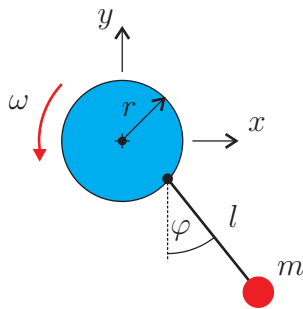
Zavedeme-li následující veličiny

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}, \quad k = \frac{l_1}{l_2}, \quad \omega_{01} = \sqrt{\frac{g}{l_1}}, \quad \omega_{02} = \sqrt{\frac{g}{l_2}},$$

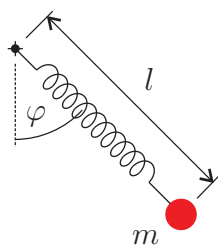
můžeme pohybové rovnice zjednodušit do tvaru

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 + \frac{\mu}{k} \ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{\mu}{k} \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + \omega_{01}^2 \sin \varphi_1 &= 0, \\ \ddot{\varphi}_2 + k \ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - k \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + \omega_{02}^2 \sin \varphi_2 &= 0. \end{aligned}$$

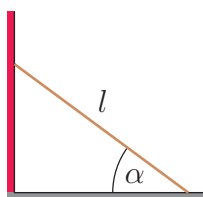
■ Příklad 4.2: Kyvadlo na rotujícím kotouči



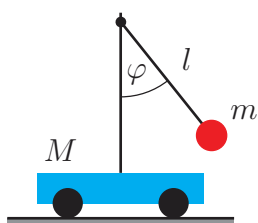
Matematické kyvadlo o hmotnosti m a délce závěsu l je volně uchyceno ve vzdálenosti r od osy kotouče, který rotuje úhlovou rychlostí ω , přičemž osy otáčení kotouče a kyvadla jsou rovnoběžné. Najděte pohybovou rovnici popisující pohyb kyvadla.

Příklad 4.3: Závaží na pružině

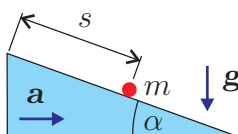
Na pružinu délky l_0 o tuhosti k zavěsíme závaží (hmotný bod) o hmotnosti m . Najděte pohybové rovnice závaží zavěšeného na této pružině za předpokladu, že se pružina může volně otáčet v jedné rovině a že její hmotnost můžeme vzhledem k hmotnosti závaží zanedbat.

Příklad 4.4: Násada od koštěte

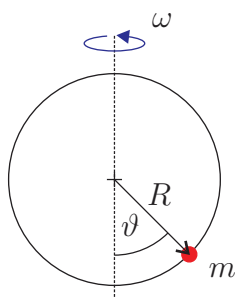
Násada od koštěte (homogenní tenká tyč) hmotnosti m a délky l je opřena na jedné straně o dokonale hladkou stěnu a o dokonale hladkou podlahu na straně druhé. Po uvolnění začne klouzat k zemi. Najděte pohybovou rovnici pro zobecněnou souřadnici α za předpokladu, že je pohyb rovinný.

Příklad 4.5: Kyvadlo na vozíku

Na vozíku o hmotnosti M , který se může volně vodorovně pohybovat, je umístěno matematické kyvadlo o hmotnosti m a délce závěsu l . Najděte pohybové rovnice vozíku a kyvadla, jestliže rovina kmitů kyvadla je rovnoběžná s přímkou, podél níž se může vozík pohybovat.

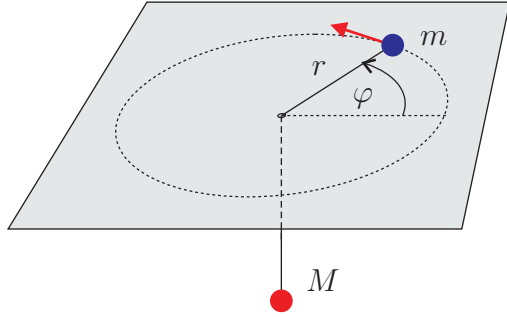
Příklad 4.6: Částice na nakloněné rovině

Nakloněná rovina s úhlem sklonu α (viz obrázek) se pohybuje podél vodorovné přímky rovnoměrně zrychleně tak, že pro polohu jejího nejvyššího bodu platí $x_n = at^2/2$. Najděte pohybovou rovnici částice o hmotnosti m , která může po nakloněné rovině volně bez tření klouzat. Pro jaký úhel a může setrvávat částice na nakloněné rovině v klidu?

Příklad 4.7: Korálek na drátě

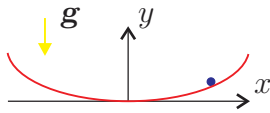
Korálek o hmotnosti m je navléknutý na kruhové drátěné smyčce o poloměru R , po které může volně klouzat. Drátěná smyčka se otáčí kolem svislé osy procházející jejím středem úhlovou rychlostí ω . Najděte pohybovou rovnici korálku.

Příklad 4.8: Kuličky spojené provázkem



Dvě malé kuličky o hmotnostech m a M jsou spojeny provázkem délky l , jehož hmotnost můžeme zanedbat, provlečeným otvorem ve stole. Kulička o hmotnosti m klouže bez tření po vodorovné, dokonale hladké desce stolu. Najděte pohybové rovnice kuliček.

Příklad 4.9: Cykloidální kyvadlo



Malá kulička o hmotnosti m se může pohybovat volně bez tření po trajektorii popsané parametrickými rovnicemi cykloidy

$$x = R(\varphi + \sin \varphi), \quad y = R(1 - \cos \varphi),$$

kde $R > 0$ a $\varphi \in \langle -\pi, \pi \rangle$. Ukažte, že pokud kuličku vychýlíme z rovnovážné polohy, nebude perioda jejích kmitů záviset na velikosti výchylky. Spočítejte tuto periodu.

Nápověda: Za zobecněnou souřadnici zvolte $q = \sin(\varphi/2)$.

Řešení: Pro složky vektoru rychlosti můžeme psát

$$\dot{x} = R(\dot{\varphi} + \dot{\varphi} \cos \varphi), \quad \dot{y} = R\dot{\varphi} \sin \varphi,$$

takže pro kinetickou energii platí

$$E_k = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = mR^2\dot{\varphi}^2(1 + \cos \varphi).$$

Pro potenciální energii dostaneme

$$E_p = mgy = mgR(1 - \cos \varphi),$$

takže pro Lagrangeovu funkci můžeme psát

$$\mathcal{L} = E_k - E_p = mR^2\dot{\varphi}^2(1 + \cos \varphi) - mgR(1 - \cos \varphi).$$

Pomocí goniometrického vzorce $\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi$ můžeme psát

$$1 + \cos \varphi = 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}, \quad 1 - \cos \varphi = 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2},$$

takže Lagrangeovu funkci můžeme přepsat do tvaru

$$\mathcal{L} = 2mR^2\dot{\varphi}^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} - 2mgR \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Uvědomíme-li si, že platí

$$\left(\sin \frac{\varphi}{2}\right)' = \frac{\dot{\varphi}}{2} \cos \frac{\varphi}{2},$$

zvolíme zobecněnou souřadnici q a zobecněnou rychlost \dot{q} ve tvaru

$$q = \sin \frac{\varphi}{2}, \quad \dot{q} = \frac{\dot{\varphi}}{2} \cos \frac{\varphi}{2}$$

a přepíšeme Lagrangeovu funkci

$$\mathcal{L} = 8mR^2\dot{q}^2 - 2mgRq^2.$$

Vypočítáme příslušné derivace

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = -4mgRq, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = 16mR^2\dot{q}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) = 16mR^2\ddot{q}$$

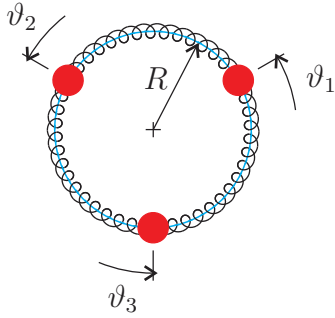
a dosazením do Lagrangeovy rovnice dostaneme pohybovou rovnici

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{q} + \frac{g}{4R}q = 0,$$

ve které poznáváme rovnici lineárního harmonického oscilátoru $\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$, kde ω_0 je kruhová frekvence volných kmitů. Pro jejich periodu tedy platí

$$\omega_0^2 = \frac{g}{4R} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{4R}{g}}.$$

■ Příklad 4.10: Tři korálky



Tři korálky stejných hmotností m jsou navlečeny na kroužku o poloměru R , po kterém se mohou volně pohybovat. Mezi korálky jsou navlečeny tři stejné pružiny o tuhosti k . Najděte pohybové rovnice pro jednotlivé korálky, zanedbejte přitom vliv tření a gravitace.

5. Hamiltonovy kanonické rovnice

■ **Příklad 5.1: Matematické kyvadlo**



Najděte Hamiltonovy kanonické rovnice pro matematické kyvadlo.

Řešení:

Pro souřadnice polohového vektoru hmotného bodu na konci matematického kyvadla můžeme psát

$$x = l \sin \varphi, \quad y = -l \cos \varphi,$$

takže pro složky vektoru rychlosti platí

$$\dot{x} = l\dot{\varphi} \cos \varphi, \quad \dot{y} = l\dot{\varphi} \sin \varphi.$$

Lagrangeova funkce má tvar

$$\mathcal{L} = E_k - E_p = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi.$$

Zvolíme-li za zobecněnou souřadnici $q = \varphi$, pro zobecněnou rychlost bude platit $\dot{q} = \dot{\varphi}$. Pro zobecněnou hybnost tak můžeme psát

$$p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi}.$$

Pro Hamiltonovu funkci platí

$$\mathcal{H} = p_\varphi \dot{\varphi} - \mathcal{L} = \frac{1}{2} \frac{p_\varphi^2}{ml^2} - mgl \cos \varphi,$$

takže Hamiltonovy kanonické rovnice můžeme psát ve tvaru

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{ml^2}, \quad \dot{p}_\varphi = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi} = -mgl \sin \varphi.$$

Derivací první z rovnic podle času a dosazením za zobecněnou hybnost do druhé z nich můžeme psát

$$ml^2\ddot{\varphi} = \dot{p}_\varphi = -mgl \sin \varphi \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0,$$

kde v posledním vztahu poznáváme pohybovou rovnici matematického kyvadla.

■ **Příklad 5.2: Závaží na pružině**

Najděte Hamiltonovy kanonické rovnice pro závaží zavěšené na pružině z příkladu 4.3.

■ **Příklad 5.3: Násada od koštěte**

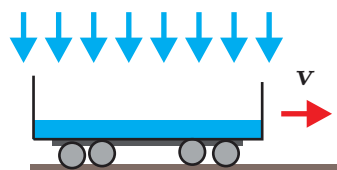
Najděte Hamiltonovy kanonické rovnice pro násadu od koštěte, viz příklad 4.4.

■ **Příklad 5.4: Korálek na drátě**

Najděte Hamiltonovy kanonické rovnice pro korálek na rotující drátěné smyčce, viz příklad 4.7.

6. Dynamika soustavy hmotných bodů

■ Příklad 6.1: Železniční vagón v dešti



Prázdný železniční vagón o hmotnosti m_0 se pohybuje bez tření po vodorovných kolejkách rychlostí o velikosti v_0 . V čase $t = 0$ do něj začne pršet, přičemž přírůstek hmotnosti vagónu za jednotku času díky dešťové vodě je

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \alpha.$$

Jak se bude s časem měnit rychlost vagónu dokud nedojde k jeho naplnění? Jak se bude s časem měnit jeho rychlost od okamžiku, kdy se celý naplní vodou a ta z něj začne vytékat? Nechť má vagón v tomto okamžiku t_1 hmotnost m_1 a rychlost o velikosti v_1 .

Řešení: Dokud se vagón celý nenaplní, jeho hmotnost se s časem mění, pokud začalo pršet v čase $t = 0$, platí pro ni vztah

$$m(t) = m_0 + \alpha t.$$

Jelikož na vagón nepůsobí žádná vnější síla a svisle padající déšť nijak nepřispívá ke změně jeho hybnosti, dostaneme z pohybové rovnice

$$\frac{dp}{dt} = 0 \Rightarrow p = \text{konst.} \Rightarrow (m_0 + \alpha t)v = m_0 v_0 \Rightarrow v = \frac{m_0 v_0}{m_0 + \alpha t},$$

tedy hybnost vagónu se nemění a díky narůstající hmotnosti jeho rychlost klesá.

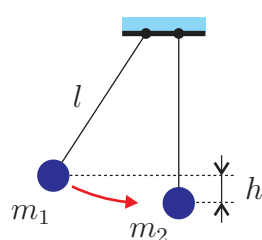
Od okamžiku naplnění vagónu se jeho hmotnost již nemění. Jelikož odtékající voda má stejnou rychlost jako vagón, její odtékání snižuje hybnost vagónu. Za čas dt se hybnost vagónu změní o

$$dp = -\frac{\Delta m}{\Delta t} v dt = -\alpha v dt \Rightarrow \frac{dp}{dt} = -\alpha v.$$

Pro pohyb vagónu tak dostaneme diferenciální rovnici a separací proměnných její řešení

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(m_1 v) = -\alpha v = m_1 \frac{dv}{dt} &\Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{\alpha}{m_1} dt \Rightarrow \int_{v_1}^v \frac{dx}{x} = -\frac{\alpha}{m_1} \int_{t_1}^t dy \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ln\left(\frac{v}{v_1}\right) = -\frac{\alpha}{m_1}(t - t_1) \Rightarrow v = v_1 e^{-\frac{\alpha}{m_1}(t-t_1)}. \end{aligned}$$

■ Příklad 6.2: Jednoduchý rázostroj



Kuličku o hmotnosti m_1 na jednoduchém rázostroji vychýlíme do výšky h , pustíme, a necháme srazit s kuličkou o hmotnosti m_2 . Vyšetřete do jaké výšky h_1 a h_2 se kuličky vychýlí po srážce za předpokladu, že se jedná o srážku dokonale pružnou. Obě kuličky jsou zavěšeny na závěsech délky l , jejichž hmotnost můžeme zanedbat. Jakými směry se odráží kuličky v závislosti na poměru hmotností m_1 a m_2 ?

Řešení: Jelikož srážka trvá velmi krátkou dobu, můžeme v jejím průběhu kuličky uvažovat jako izolovanou soustavu (v průběhu srážky se navíc pohybují vodorovně a tíhové síly jsou kompenzovány tahem závěsů). Z tohoto důvodu dochází k zachování celkové hybnosti kuliček. Jelikož je srážka dokonale pružná, zachovává se v jejím průběhu kinetická energie. Můžeme tedy psát

$$\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \quad \text{a} \quad \mathbf{E}'_{k1} + \mathbf{E}'_{k2} = \mathbf{E}_{k1} + \mathbf{E}_{k2},$$

kde čárkovaně jsou označeny veličiny těsně před srážkou a nečárkovaně veličiny těsně po srážce. Jelikož se jedná o srážku lineární, leží vektory rychlostí těsně před a po srážce na jedné přímce. Zákony zachování tedy můžeme psát ve tvaru

$$m_1 V + 0 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \quad \text{a} \quad \frac{1}{2} m_1 V^2 + 0 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2, \quad (1)$$

kde V je rychlost (resp. složka vektoru rychlosti ve směru srážky) první kuličky před srážkou (rychlost druhé kuličky je nulová) a v_1, v_2 jsou rychlosti kuliček po srážce. Nechť $V > 0$.

Z levé rovnice (1) vyjádříme $m_1 v_1 = m_1 V - m_2 v_2$, po dosazení do rovnice pravé a drobné úpravě dostaneme

$$(m_2 v_2 - 2m_1 V + m_1 v_2) v_2 = 0.$$

Odtud dostaneme $v_2 = 0$ a ze zákona zachování hybnosti pak $v_1 = V$, což je řešení před srážkou, které pro nás není zajímavé. Anulováním závorky vypočteme v_2 a dosazením do zákona zachování hybnosti dostaneme řešení po srážce

$$v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} V, \quad v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} V. \quad (2)$$

Odtud je vidět, že v_2 má vždy stejné znaménko jako V – druhá kulička po srážce pokračuje vždy směrem první kuličky před srážkou. Jestliže $m_1 > m_2$, platí: $\text{sign}(v_1) = \text{sign}(V)$, první kulička po srážce nemění směr. Jestliže $m_1 < m_2$, platí: $\text{sign}(v_1) = -\text{sign}(V)$ – první kulička po srážce změní směr. Pokud $m_1 = m_2$, první kulička se po srážce zastaví a druhá se pohybuje její rychlostí (kuličky si vymění hybnosti).

Rychlost V spočteme ze zákona zachování energie

$$0 + m_1 g h = \frac{1}{2} m_1 V^2 \quad \Rightarrow \quad V = \sqrt{2gh},$$

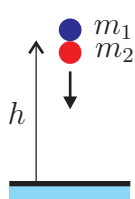
stejně vypočteme z rychlostí v_1, v_2 výšky h_1 a h_2 .

$$h_1 = \frac{v_1^2}{2g}, \quad h_2 = \frac{v_2^2}{2g}.$$

Dosazením do (2) dostaneme výchylky kuliček po srážce

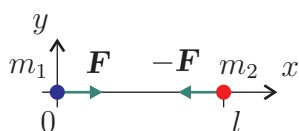
$$h_1 = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 h, \quad h_2 = \frac{4m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} h.$$

● Příklad 6.3: Urychlovač



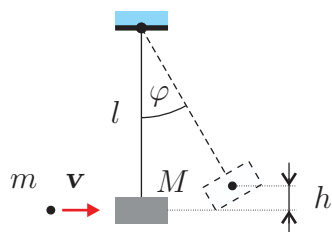
Dva míčky o hmotnostech m_1 a m_2 , kde $m_1 < m_2$ umístěné nad sebou tak, že lehčí je nad těžším, pustíme na zem z výšky h . Vypočítejte výšky h_1 a h_2 , do kterých míčky po odrazu od země vyskočí. Pro jaký poměr hmotností vyskočí lehčí míček nejvýše a jaká je tato výška? Předpokládejte přitom, že všechny rázy jsou dokonale pružné, že rozměry míčků můžeme oproti výškám h , h_1 a h_2 zanedbat a že jejich pohyb před a po odrazu probíhá podél přímky.

● Příklad 6.4: Dvě částice



Částice o hmotnosti m_1 je umístěna v počátku souřadné soustavy, částice o hmotnosti m_2 ve vzdálenosti l na ose x . Vypočítejte, v jakém čase, na jakém místě a jakou vzájemnou rychlostí se částice srazí, pokud se vzájemně přitahují silou konstantní velikosti F .

■ Příklad 6.5: Balistické kyvadlo



Balistické kyvadlo, viz obrázek, je zařízení, pomocí něhož lze zjistit rychlost projektilu (střely). Střela o hmotnosti m je vypálena rychlostí neznámé velikosti v do terčové části balistického kyvadla, která má hmotnost $M \gg m$ a v níž se zasekne. Najděte vztah pro velikost rychlosti střely v závislosti na výchylce kyvadla. Vzdálenost terčové části od osy otáčení je l , hmotnost závěsu můžeme zanedbat. Jaká část kinetické energie střely se využije na vychýlení kyvadla?

Řešení: Jelikož se střela v terčové části kyvadla zasekne, jedná se o nepružnou srážku a nelze k jejímu popisu použít zákon zachování kinetické energie. Vyjdeme-li ze zákona zachování hybnosti (s ohledem na směr v němž srážka probíhá a dobu trvání srážky můžeme kyvadlo a střelu považovat za izolovanou soustavu) můžeme psát

$$m\mathbf{v} = (m + M)\mathbf{V},$$

kde \mathbf{V} je rychlost, jíž se kyvadlo pohybuje i se střelou těsně po jejím zaseknutí. Pro velikost rychlosti střely tak dostaneme vzorec

$$v = \frac{m + M}{m}V. \quad (1)$$

Počáteční rychlost kyvadla se zaseknutou střelou snadno určíme z výšky h , do které se kyvadlo vyhoupne

$$\frac{1}{2}(m + M)V^2 = (m + M)gh \quad \Rightarrow \quad V = \sqrt{2gh}.$$

Vztah mezi výškou h a úhlem φ najdeme z pravoúhlého trojúhelníku

$$\cos \varphi = \frac{l - h}{l} \quad \Rightarrow \quad h = l(1 - \cos \varphi),$$

takže po dosazení předchozích výsledků do vztahu (1) určíme rychlost střely jako

$$v = \frac{m+M}{m} \sqrt{2gl(1-\cos\varphi)} = 2\frac{m+M}{m} \sqrt{gl} \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right|.$$

Kinetická energie střely před zaseknutím do kyvadla je

$$E_{\text{ks}} = \frac{1}{2}mv^2,$$

kinetická energie kyvadla těsně po zaseknutí střely je

$$E_{\text{kk}} = \frac{1}{2}(m+M)V^2 = \frac{m^2}{2(m+M)}v^2,$$

takže poměr těchto energií je

$$\frac{E_{\text{kk}}}{E_{\text{ks}}} = \frac{m}{m+M},$$

odkud je vidět, že pro $m \ll M$ se pouze malá část kinetické energie střely využije na urychlení kyvadla.

■ **Příklad 6.6: Střela v krabici**

Střela o hmotnosti $m = 10 \text{ g}$ byla vypálena do krabice s pískem o hmotnosti $M = 2 \text{ kg}$ ležící na vodorovné podložce a zasekla se v ní, přičemž ji posunula o vzdálenost $l = 25 \text{ cm}$. Víte-li, že koeficient smykového tření mezi krabicí a podložkou $\mu = 0,2$, vypočítejte rychlost střely a dobu pohybu krabice.

■ **Příklad 6.7: Pružná srážka částic**

Částice A o hmotnosti m_A a kinetické energii E se dokonale pružně srazí s částicí B o hmotnosti m_B , která je v klidu. Jaký musí být poměr hmotností obou částic, aby částice B získala od částice A co nejvíce energie? Čemu se tato energie rovná? Srážka probíhá po přímce.

■ **Příklad 6.8: Nepružná srážka částic**

Dvě částice stejné hmotnosti se srazí takovým způsobem, že po srážce zůstanou spojené. Jaká energie E_s se spotřebuje při srážce, jestliže a) jedna částice byla před srážkou v klidu a druhá měla kinetickou energii E a b) jestliže částice měly před srážkou stejnou kinetickou energii E a opačné rychlosti? Srážka v obou případech probíhá po přímce.

■ **Příklad 6.9: Srážkový experiment**

Částice α (jádro hélia ${}^4_2\text{He}$) se ve srážkovém experimentu odrazila od neznámého atomového jádra, přičemž při srážce ztratila 75% své kinetické energie. Jakou hmotnost M má neznámé atomové jádro? Předpokládejte, že srážka byla pružná a probíhala po přímce.

Příklad 6.10: Pašeráci

Dvě pašerácké lodě o hmotnostech $m_1 = 500 \text{ kg}$ a $m_2 = 1000 \text{ kg}$ se pohybují proti sobě. V okamžiku kdy se míjí, předají si posádky navzájem pytle se zbožím o hmotnosti $m = 50 \text{ kg}$. Následkem výměny se první loď zastaví a druhá pokračuje původním směrem rychlostí $v'_2 = 8,5 \text{ m s}^{-1}$. Jaké byly rychlosti v_1 a v_2 loďek před výměnou zboží?

Řešení: Úlohu vyřešíme s pomocí zákona zachování hybnosti, jelikož je úloha jednorozměrná, vystačíme si s jednou složkou příslušných vektorů.

První loďka má před výměnou hybnost p_1 , odevzdáním pytle přijde o Δp_1 , přijetím pytle získá Δp_2 , výsledná hybnost je pak p'_1 . Druhá loďka má před výměnou hybnost p_2 , odevzdáním pytle přijde o Δp_2 , přijetím pytle získá Δp_1 , výsledná hybnost je pak p'_2 . Pomocí vzorců můžeme psát

$$p_1 - \Delta p_1 + \Delta p_2 = p'_1, \quad p_2 - \Delta p_2 + \Delta p_1 = p'_2,$$

neboli

$$m_1 v_1 - m v_1 + m v_2 = 0, \quad m_2 v_2 - m v_2 + m v_1 = m_2 v'_2.$$

Nula na pravé straně levé rovnice vyjadřuje skutečnost, že první loďka se po vzájemné výměně pytlů zastaví.

Vyřešením soustavy algebraických rovnic dostaneme výsledek

$$v_1 = -\frac{m_2 m}{m_1 m_2 - m_1 m - m_2 m} v'_2, \quad v_2 = \frac{(m_1 - m) m_2}{m_1 m_2 - m_1 m - m_2 m} v'_2.$$

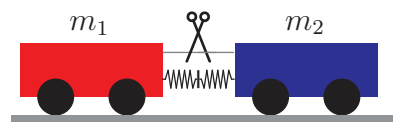
Dosazením číselných hodnot pak dostaneme (označíme-li směr druhé loďky po výměně pytlů za kladný) $v_1 = -1 \text{ m s}^{-1}$, $v_2 = 9 \text{ m s}^{-1}$.

Příklad 6.11: Chůze na lodi

Člověk o hmotnosti $m = 75 \text{ kg}$ stojí na loďce o délce $l = 2 \text{ m}$ a hmotnosti $M = 25 \text{ kg}$. O jakou vzdálenost se posune vzhledem ke břehu, když přejde z jednoho konce loďky na druhý? Předpokládejte přitom, že odpor vody je možné zanedbat.

Příklad 6.12: Nezabrzdné dělo

Z děla o hmotnosti M , které se může volně pohybovat po vodorovné zemi byl vystřelen projektil o hmotnosti m . Vypočítejte směr (elevační úhel α') počáteční rychlosti projektilu, jestliže nastavený elevační úhel děla byl α .

Příklad 6.13: Dva vozíky na pružině

Dva vozíky o hmotnostech m_1 a m_2 , které se mohou pohybovat bez tření podél vodorovné přímky a které jsou opatřené pružinovými nárazníky, jsou spojeny pevným vláknem tak, že pružiny tuhosti k jsou dohromady stlačeny o vzdálenost Δx . Jakými rychlostmi se budou vozíky pohybovat po přestřižení vlákna, pokud byly původně v klidu?

Řešení: Potenciální energie stlačených pružin E_p je po přestřižení vlákna přeměněna v kinetickou energii vozíků, takže platí

$$E_p = E_{k1} + E_{k2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}k(\Delta x)^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2,$$

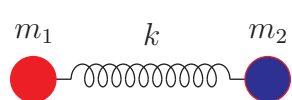
kde v_1 a v_2 jsou rychlosti vozíků podél dané přímky. Jelikož vozíky byly původně v klidu a nepůsobí na ně (ve směru pohybu) vnější síly, zůstává celková hybnost nulová a platí tak

$$m_1v_1 + m_2v_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad m_1v_1 = -m_2v_2,$$

vozíky se tedy pohybují opačnými směry. Vyřešením soustavy rovnic dostaneme

$$v_2 = \sqrt{\frac{m_1k}{m_2(m_1 + m_2)}}\Delta x, \quad v_1 = -\sqrt{\frac{m_2k}{m_1(m_1 + m_2)}}\Delta x$$

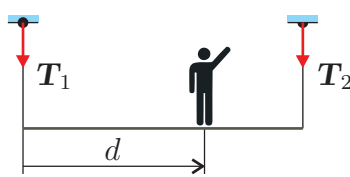
Příklad 6.14: Dvě závaží na pružině



Dvě závaží o hmotnostech m_1 a m_2 jsou spojena pružinou o tuhosti k . Vypočítejte periodu kmitů tohoto systému za předpokladu, že na něj nepůsobí vnější síly a že pohyb je jednorozměrný.

7. Mechanika tuhého tělesa

■ Příklad 7.1: Visutá lávka



Na visuté lávce o délce l a hmotnosti M stojí ve vzdálenosti d člověk o hmotnosti m . Vypočítejte, jakými silami jsou napínány závěsy držící lávku. Hmotnost závěsů zanedbejte.

Řešení: Síly napínající závěsy vypočteme z podmínek statické rovnováhy. Aby jí bylo dosaženo, musí být součet všech působících sil a momentů vzhledem k nějakému vztáhnému bodu nulový.

Pro síly tedy musí platit

$$\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 + \mathbf{F}_{\text{gl}} + \mathbf{F}_{\text{gč}} = \mathbf{0},$$

kde \mathbf{T}_1 a \mathbf{T}_2 jsou síly napínající závěsy, \mathbf{F}_{gl} je tíha lávky a $\mathbf{F}_{\text{gč}}$ je tíha člověka. Rozepsáním do složek dostaneme

$$(T_1 + T_2 - F_{\text{gl}} - F_{\text{gč}})\mathbf{j} = \mathbf{0} \Rightarrow T_1 + T_2 = F_{\text{gl}} + F_{\text{gč}}. \quad (1)$$

Zvolíme-li za referenční bod levý okraj lávky, musí platit pro momenty sil

$$\mathbf{M}_{\text{gl}} + \mathbf{M}_{\text{gč}} + \mathbf{M}_2 = \mathbf{0},$$

přičemž rozepsáním do složek dostaneme

$$\left(-\frac{l}{2}F_{\text{gl}} - dF_{\text{gč}} + lT_2\right)\mathbf{k} = \mathbf{0} \Rightarrow T_2 = \frac{1}{2}F_{\text{gl}} + \frac{d}{l}F_{\text{gč}}.$$

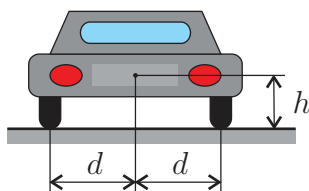
Dosazením tohoto výsledku do pravé z rovnic (1) pak dostaneme

$$T_1 = \frac{1}{2}F_{\text{gl}} + \frac{l-d}{l}F_{\text{gč}}.$$

Dosazením do vzorců za tíhu pak získáme výsledky ve tvaru

$$T_1 = \left(\frac{M}{2} + \frac{l-d}{l}m\right)g, \quad T_2 = \left(\frac{M}{2} + \frac{d}{l}m\right)g.$$

■ Příklad 7.2: Auto v zatáčce



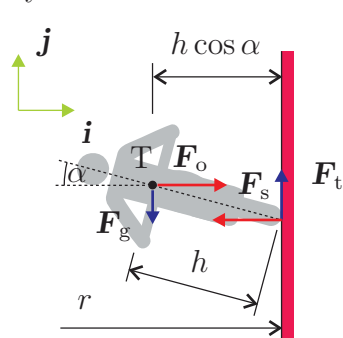
Automobil o hmotnosti $m = 800$ kg projíždí neklopenou zatáčkou o poloměru křivosti $r = 180$ m rychlostí $v = 108$ km h⁻¹. Vypočítejte, jaké síly F_l , F_p působí na levá a pravá kola, pokud je střed křivosti zatáčky nalevo od automobilu. Těžiště automobilu leží ve výšce $h = 0,5$ m nad zemí uprostřed mezi koly vzdálenými $2d = 2$ m. Jakou maximální rychlostí v_m může automobil projet zatáčkou po čtyřech kolech?

zatáčkou po čtyřech kolech?

■ Příklad 7.3: Jízda smrti

Jednou z cirkusových atrakcí je jízda na motocyklu po dráze tvořené vnitřní stěnou válce stojícího na své podstavě. Jakou nejmenší rychlostí musí motocyklista ve vodorovném směru jet, aby se na svislé stěně udržel? Jaký úhel α při této rychlosti svírá motocyklista vzhledem ke kolmici na stěnu? Poloměr dráhy $r = 10$ m, koeficient smykového tření mezi stěnou a pneumatikou $\mu = 0,4$ a vzdálenost hmotného středu motocyklu i s jezdce $h = 1$ m od bodu dotyku pneumatiky a stěny.

Řešení: Úlohu nejsnáze vyřešíme z neinerciální vztahné soustavy pevně spojené s motocyklistou.



Aby jezdec ze stěny nesklouzl, musí být výslednice na něj působících sil nulová, tedy (viz obrázek)

$$\mathbf{F}_g + \mathbf{F}_o + \mathbf{F}_s + \mathbf{F}_t = \mathbf{0},$$

kde \mathbf{F}_g je tíhová síla, \mathbf{F}_o je odstředivá síla, \mathbf{F}_s je reakce stěny a \mathbf{F}_t je třecí síla. Tuto rovnici můžeme přepsat ve složkách

$$(F_o - F_s)\mathbf{i} + (F_t - F_g)\mathbf{j} = \mathbf{0},$$

takže musí platit

$$F_s = F_o, \quad F_t = F_g. \quad (1)$$

Pro odstředivou sílu, která působí v hmotném středu, platí

$$F_o = m \frac{v^2}{R},$$

kde v je rychlost, m je hmotnost jezdce s motocyklem a R je vzdálenost hmotného středu od osy rotace, pro kterou platí (kvůli sklonu jezdce)

$$R = r - h \cos \alpha.$$

Po dosazení do levé z rovnic (1) pro reakci stěny dostaneme

$$F_s = \frac{mv^2}{r - h \cos \alpha}.$$

Pro třecí sílu platí $F_t = \mu F_s$, tato síla musí být rovna (anebo větší) než síla tíhová $F_g = mg$, takže pro minimální potřebnou rychlost dostaneme

$$\mu F_s = mg \quad \Rightarrow \quad \frac{\mu mv^2}{r - h \cos \alpha} = mg \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{g(r - h \cos \alpha)}{\mu}}. \quad (2)$$

Dále je třeba určit úhel náklonu jezdce α . Ten musí být takový, aby celkový moment sil byl nulový a jezdec se nepřeklopil. Příslušná podmínka má tvar

$$\mathbf{M}_g + \mathbf{M}_o = \mathbf{0},$$

kde \mathbf{M}_g a \mathbf{M}_o jsou momenty tíhové a odstředivé síly vzhledem k bodu dotyku pneumatiky se stěnou. Rozepsáním do složek dostaneme

$$(hF_g \cos \alpha - hF_o \sin \alpha)\mathbf{k} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad F_g \cos \alpha = F_o \sin \alpha.$$

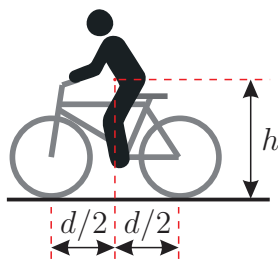
Odtud pak plyne

$$\tan \alpha = \frac{F_g}{F_o} = \frac{g(r - h \cos \alpha)}{v^2} = \mu \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arctan \mu,$$

kde jsme za rychlost dosadili ze vztahu (2). Dosazením číselných hodnot dostaneme

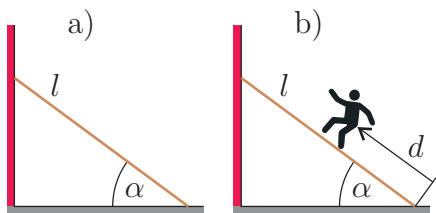
$$\alpha = \arctan 0,4 = 21^\circ 48', \quad v = 14,92 \text{ m s}^{-1} = 53,7 \text{ km h}^{-1}.$$

■ Příklad 7.4: Cyklistův problém



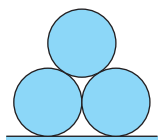
Cyklista jede po rovině na jízdním kole, jehož kola se dotýkají vozovky ve vzájemné vzdálenosti d a jejich koeficient smykového tření vzhledem k vozovce je μ . Těžiště cyklisty na kole leží ve výšce h nad vozovkou uprostřed mezi koly. S jakým maximálním zpomalením může jet beze smyku, pokud bude brzdít pouze zadní, respektive pouze přední brzdou?

■ Příklad 7.5: Žebřík



O stěnu domu stojí opřený žebřík délky l . Koeficient smykového tření mezi žebříkem a zemí je μ , tření mezi žebříkem a stěnou můžeme zanedbat. Vypočítejte a) jaký nejmenší může být úhel α_{\min} , aby žebřík nesklouzl. Zjistěte b) co se stane, když po žebříku opřeném pod úhlem α_{\min} vystoupí člověk do vzdálenosti d .

■ Příklad 7.6: Lahváče



Následující úlohu lze vyřešit snadno i experimentálně, nicméně bychom to měli zvládnout i teoreticky. Tři lahve od piva postavíme na sebe jako malou pyramidu na skleněnou podložku. Udrží se pyramida, nebo se lahve rozjedou?

■ Příklad 7.7: Těžiště kužele

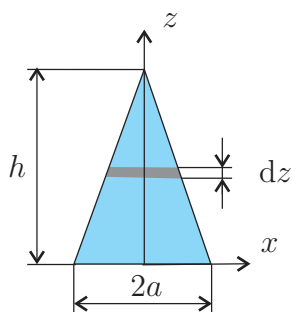
Určete polohu těžiště homogenního kužele o výšce h a poloměru základny a .

Řešení: Těžiště spojitého tělesa vypočítáme z definice

$$\mathbf{r}^* = \frac{1}{m} \iiint_{(m)} \mathbf{r} dm = \frac{1}{m} \iiint_{(V)} \mathbf{r} \rho dV = \frac{1}{V} \iiint_{(V)} \mathbf{r} dV, \quad (1)$$

kde integrál se počítá přes celou hmotu m (objem V) tělesa, ρ je jeho hustota. Poslední rovnost platí pouze v případě homogenního tělesa ($\rho = \text{konst.}$). Integrál (1) má tři složky

$$x^* = \frac{1}{V} \iiint_{(V)} x dV, \quad y^* = \frac{1}{V} \iiint_{(V)} y dV, \quad z^* = \frac{1}{V} \iiint_{(V)} z dV.$$



Umístíme-li kužel do souřadnicové soustavy tak, že jeho podstava bude ležet v rovině xy a jeho osa bude totožná s osou z , bude díky symetrii platit $x^* = 0$, $y^* = 0$. Abychom se vyhnuli počítání vícenásobného integrálu pro určení složky z^* polohového vektoru těžiště, redukuje je na integrál jednoduchý. Vzhledem k tomu, že integrovaná funkce je pouze funkcí proměnné z , vyjádříme objemový element dV pomocí této proměnné. Bude jím váleček elementární tloušťky dz a poloměru r , jehož elementární objem je

$$dV = \pi r^2 dz.$$

Vzhledem k tomu, že tento objemový element je *nekonečně tenký*, neliší se jeho elementární objem od objemu *elementárního komolého kužele*. Pro poloměr elementárního válečku dostaneme z geometrie úlohy

$$r = a \left(1 - \frac{z}{h}\right) \quad \Rightarrow \quad dV = \pi a^2 \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 dz.$$

Integrovat budeme přes celý objem kužele, tedy

$$\begin{aligned} z^* &= \frac{1}{V} \int_0^h \pi a^2 \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 z dz = \frac{\pi a^2}{V} \int_0^h \left(z - \frac{2z^2}{h} + \frac{z^3}{h^2}\right) dz = \\ &= \frac{\pi a^2}{V} \left[\frac{z^2}{2} - \frac{2z^3}{3h} + \frac{z^4}{4h^2} \right]_0^h = \frac{\pi a^2 h^2}{12V}. \quad (2) \end{aligned}$$

Pro objem kužele V dostaneme

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h \pi a^2 \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 dz = \pi a^2 \int_0^h \left(1 - \frac{2z}{h} + \frac{z^2}{h^2}\right) dz = \\ &= \pi a^2 \left[z - \frac{z^2}{h} + \frac{z^3}{3h^2} \right]_0^h = \frac{1}{3} \pi a^2 h. \end{aligned}$$

Dosazením objemu kužele do vzorce (2) dostaneme výsledný vztah

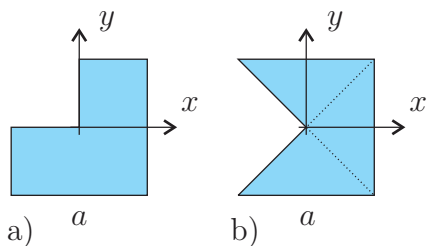
$$z^* = \frac{h}{4}.$$



Příklad 7.8: Těžiště polokoule

Určete polohu těžiště homogenní polokoule o poloměru a .

■ Příklad 7.9: Těžiště rovinných objektů



Najděte polohy těžiště rovinných objektů, které získáme a) vyříznutím čtverce, b) vyříznutím trojúhelníka z homogenního čtverce o délce strany a .

Řešení: Ad a) Polohu těžiště objektu můžeme vypočítat tak, že určíme polohy těžišť jednotlivých čtverců a výsledné těžiště jako těžiště soustavy hmotných bodů. Postupně dostaneme

$$\mathbf{r}_{PH}^* = \left(\frac{a}{4}, \frac{a}{4}\right), \quad \mathbf{r}_{LD}^* = \left(-\frac{a}{4}, -\frac{a}{4}\right), \quad \mathbf{r}_{PD}^* = \left(\frac{a}{4}, -\frac{a}{4}\right).$$

Těžiště soustavy těchto *hmotných bodů* spočteme jako

$$\mathbf{r}^* = \frac{1}{m} \left[\frac{m}{3} \mathbf{r}_{PH}^* + \frac{m}{3} \mathbf{r}_{LD}^* + \frac{m}{3} \mathbf{r}_{PD}^* \right] = \left(\frac{a}{12}, -\frac{a}{12}\right).$$

Ad b) Vzhledem k symetrii je zřejmé, že $y^* = 0$. x -ovou složku polohového vektoru těžiště můžeme spočítat např. z horní poloviny objektu (symetrie). Tu dále rozdělíme na trojúhelník a čtverec. Pro čtverec díky symetrii dostaneme $x_{\square}^* = a/4$. Pro trojúhelník potom

$$\begin{aligned} x_{\triangle}^* &= \frac{1}{S} \iint_{(S)} x \, dS = \frac{1}{S} \int_{-a/2}^0 x y(x) \, dx = \frac{8}{a^2} \int_{-a/2}^0 x \left(\frac{a}{2} + x\right) dx = \\ &= \frac{8}{a^2} \left[\frac{ax^2}{4} + \frac{x^3}{3} \right]_{-a/2}^0 = \frac{8}{a^2} \left[-\frac{a^3}{16} + \frac{a^3}{24} \right] = -\frac{a}{6}. \end{aligned}$$

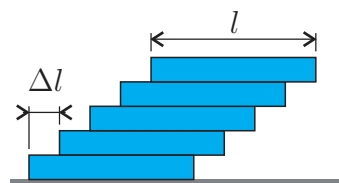
Pro x -ovou složku polohového vektoru těžiště celého objektu pak dostaneme

$$x^* = \frac{S_{\square} x_{\square}^* + S_{\triangle} x_{\triangle}^*}{S_{\square} + S_{\triangle}} = \frac{S_{\square} \frac{a}{4} + \frac{S}{2} \left(-\frac{a}{6}\right)}{S_{\square} + \frac{S}{2}} = \frac{a}{9}.$$

■ Příklad 7.10: Půlkruhový stůl

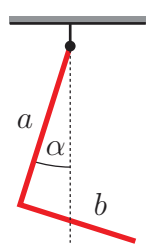
Do jakého místě je nejlepší umístit nohu ke stolu s půlkruhovou homogenní deskou o poloměru R ?

■ Příklad 7.11: Dominové kostky



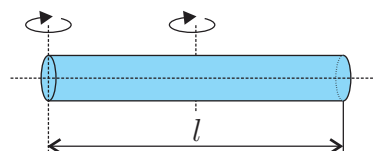
Nejdelší rozměr (délka) dominové kostky je l . Jaký maximální počet (N) kostek můžeme naskládat na sebe, jestliže vždy každou další posuneme oproti pod ní ležící kostce o $\Delta l = l/n$, kde $n > 1$ je celé číslo?

Příklad 7.12: Ohnutý drát



Homogenní tenký drát konstantního průřezu byl ohnut do pravého úhle tak, že jeho ramena mají délku a a b . Poté byl volně zavěšen ke stropu. Vypočítejte, pod jakým úhlem α od vertikály je odkloněno rameno, za které drát visí.

Příklad 7.13: Moment setrvačnosti tyče



Vypočítejte moment setrvačnosti dlouhé a tenké homogenní tyče konstantního průřezu délky l a hmotnosti m , pokud je osa rotace kolmá na osu tyče a prochází a) středem tyče a b) okrajem tyče.

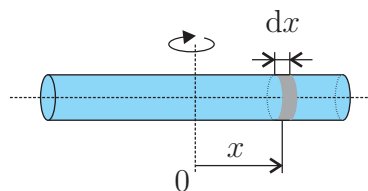
Řešení: Moment setrvačnosti J tuhého tělesa vzhledem k nějaké ose rotace vypočteme pomocí vztahu

$$J = \iiint_{(m)} r^2 dm,$$

kde integrace probíhá přes hmotu celého tělesa a r je vzdálenost elementu dm od osy rotace.

V případě, že je tyč dlouhá a úzká, se můžeme vyhnout výpočtu vícenásobného integrálu následujícím způsobem, viz obrázek. Za element objemu zvolíme výřez tyče tloušťky dx , takže bude platit

$$dm = \rho dV = \rho S dx,$$



kde ρ je hustota. Pro moment setrvačnosti **ad a)** pak můžeme psát

$$J_{\text{stř}} = \int_{-l/2}^{l/2} x^2 \rho S dx = \rho S \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-l/2}^{l/2} = \frac{\rho S l^3}{12} = \frac{1}{12} m l^2,$$

kde jsme dosadili za hustotu $\rho = m/(Sl)$. Výsledek je pouze přibližný, při výpočtu jsme předpokládali, že vzdálenost *každé části výřezu* (elementárního objemu) dV od osy rotace je $|x|$.

Ad b) V případě, že tyč rotuje kolem osy procházející kolmo jejím okrajem, dostaneme moment setrvačnosti jako

$$J_{\text{okr}} = \int_0^l x^2 \rho S dx = \rho S \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^l = \frac{\rho S l^3}{3} = \frac{1}{3} m l^2.$$

K získání předchozího výsledku bychom mohli použít i Steinerovu větu

$$J = J_0 + m a^2,$$

kde J_0 je moment setrvačnosti vzhledem k ose O procházející těžištěm a J je moment setrvačnosti vzhledem k paralelní ose O' procházející ve vzdálenosti a od osy O . Bude tedy platit

$$J_{\text{okr}} = J_{\text{stř}} + m \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4} \right) ml^2 = \frac{1}{3} ml^2.$$

■ Příklad 7.14: Moment setrvačnosti válce 1

Vypočítejte moment setrvačnosti homogenního válce o poloměru R a hmotnosti m vzhledem k jeho geometrické ose.

Řešení:

Moment setrvačnosti vypočítáme z definičního vztahu

$$J = \iiint_{(V)} r^2 \rho \, dV.$$

Abychom se vyhnuli výpočtu vícenásobného integrálu, vyjádříme objemový element dV pomocí proměnné, jejíž funkcí je integrovaný výraz, zde proměnné r . Geometricky se jedná o válcovou slupku o výšce h , poloměru r a tloušťce stěny dr , viz obrázek. Objem tohoto elementu najdeme buď jako diferenciál objemu válce

$$V = \pi r^2 h \quad \Rightarrow \quad dV = 2\pi h r dr,$$

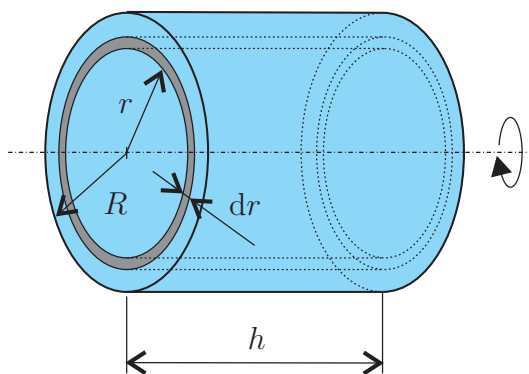
anebo „narovnáním“ na tenký kvádr o stranách $h, 2\pi r, dr$. Integrací přes celý objem dostaneme

$$J = 2\pi \rho h \int_0^R r^3 dr = 2\pi \rho h \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{\pi \rho h R^4}{2}.$$

Vyjádříme-li hustotu jako

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\pi R^2 h} = \frac{1}{2} m R^2,$$

kde za hustotu jsme dosadili $\rho = m/V = m/(\pi R^2 h)$.



⊙ Příklad 7.15: Moment setrvačnosti válce 2

Vypočítejte moment setrvačnosti homogenního válce o hmotnosti m , poloměru R a výšce h vzhledem k ose, jež je kolmá k jeho geometrické ose a prochází středem válce.

■ Příklad 7.16: Moment setrvačnosti koule

Vypočítejte moment setrvačnosti homogenní koule o hmotnosti m a poloměru R vzhledem k ose procházející jejím středem.

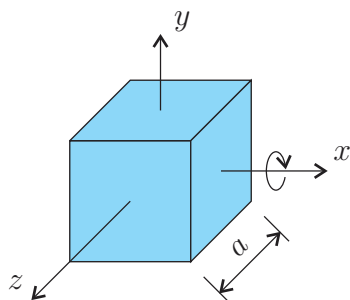
Příklad 7.17: Moment setrvačnosti míče

Vypočítejte moment setrvačnosti míče o hmotnosti m a poloměru R pro osu rotace procházející středem míče. Míč si lze představit jako homogenní kulovou slupku zanedbatelné tloušťky (s ohledem na poloměr R).

Příklad 7.18: Moment setrvačnosti krychle

Vypočítejte moment setrvačnosti homogenní krychle o šířce strany a a hmotnosti m vzhledem k ose procházející středu dvou protilehlých stěn.

Řešení:



Moment setrvačnosti vypočteme z definičního integrálu

$$J = \rho \iiint_{(V)} r^2 dV.$$

Protože krychle není rotačně symetrické těleso, nevyhneme se výpočtu vícenásobného integrálu. Umístíme-li ji do středu kartézských souřadnic a rotační osu ztotožníme s osou x , můžeme psát $dV = dxdydz$, $r^2 = y^2 + z^2$ a pro moment setrvačnosti postupně dostaneme

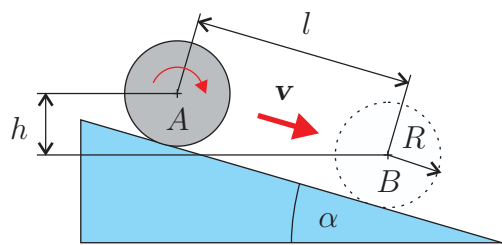
$$\begin{aligned} J &= \rho \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} (y^2 + z^2) dxdydz = \rho \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} a (y^2 + z^2) dydz = \\ &= \rho a \int_{-a/2}^{a/2} \left(\frac{a^3}{12} + az^2 \right) dz = \frac{1}{6} \rho a^5 = \frac{1}{6} m a^2, \end{aligned}$$

kde jsme v posledním kroku dosadili $\rho = m/V = m/a^3$.

Příklad 7.19: Závod koule a válce

Na nakloněnou rovinu s úhlem sklonu α položíme homogenní kouli a válec. Oba objekty se začnou bez smýkání kutálet dolů. S jakým zrychlením se budou pohybovat? Který z objektů se bude kutálet rychleji?

Řešení:



Při kutálení koule či válce (dále jen tělesa) dochází jednak k rotaci tělesa okolo hmotného středu a jednak k jeho translaci. Pohyb můžeme vyšetřit např. pomocí zákona zachování energie. Nechť v pozici A, viz obrázek, je těleso v klidu a nechť v místě B je hladina nulové potenciální energie. Potom bude platit

$$E_{kA} + E_{pA} = E_{kB} + E_{pB} \quad \Rightarrow \quad mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2,$$

kde první výraz na pravé straně reprezentuje kinetickou energii translační (hmotného středu tělesa) a druhý kinetickou energii rotační (okolo hmotného středu), přičemž v je

velikost rychlosti hmotného středu, ω je velikost úhlové rychlosti a m je hmotnost tělesa. Jelikož obvodová rychlost bodu v místě dotyku tělesa a podložky se rovná rychlosti hmotného středu, platí $v = \omega R$, kde R je poloměr. Jelikož dále platí $h = l \sin \alpha$, můžeme ZZE přepsat do tvaru

$$mgl \sin \alpha = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\frac{J}{R^2}v^2 \quad \Rightarrow \quad v = \frac{dl}{dt} = \sqrt{\frac{2gl \sin \alpha}{1 + J/(mR^2)}}.$$

Diferenciální rovnici vyřešíme separací proměnných

$$\begin{aligned} \frac{dl}{\sqrt{l}} &= \sqrt{\frac{2g \sin \alpha}{1 + J/(mR^2)}} dt \quad \Rightarrow \quad \int_0^l x^{-1/2} dx = \int_0^t \sqrt{\frac{2g \sin \alpha}{1 + J/(mR^2)}} dy \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad 2\sqrt{l} = \sqrt{\frac{2g \sin \alpha}{1 + J/(mR^2)}} t \quad \Rightarrow \quad l = \frac{1}{2} \left[\frac{g \sin \alpha}{1 + J/(mR^2)} \right] t^2. \end{aligned}$$

Pozorným pohledem anebo dvojným derivováním podle času snadno zjistíme, že výraz v hranaté závorce představuje zrychlení rovnoměrně zrychleného pohybu, platí tedy

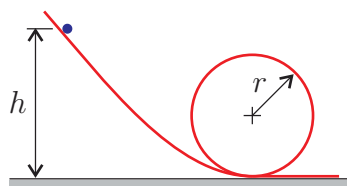
$$a = \frac{g \sin \alpha}{1 + J/(mR^2)}.$$

Pro kouli a válec tedy dostaneme

$$\begin{aligned} J_{\text{koule}} &= \frac{2}{5}mR^2 \quad \Rightarrow \quad a_{\text{koule}} = \frac{g \sin \alpha}{1 + 2/5} = \frac{5}{7}g \sin \alpha = \frac{15}{21}g \sin \alpha, \\ J_{\text{válec}} &= \frac{1}{2}mR^2 \quad \Rightarrow \quad a_{\text{válec}} = \frac{g \sin \alpha}{1 + 1/2} = \frac{2}{3}g \sin \alpha = \frac{14}{21}g \sin \alpha, \end{aligned}$$

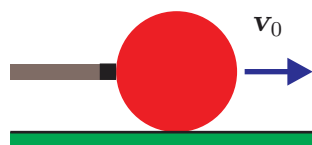
odkud je vidět, že koule se bude kutálet rychleji než válec.

■ Příklad 7.20: Nebezpečný kousek s kuličkou (modifikace příkladu 3.17)



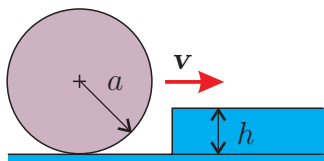
Je třeba najít minimální výšku h , ze které když pustíme malou kuličku s nulovou počáteční rychlostí, projede kruhovou dráhu (viz obrázek) o poloměru r tak, že s ní bude po celou dobu v kontaktu. Předpokládejte, že kulička se po dráze **kutálí**, její poloměr R lze zanedbat oproti poloměru dráhy r a odpor vzduchu a valivý odpor lze zanedbat.

■ Příklad 7.21: Úder tágem do koule



Tágo bouchne do středu kulečnické koule, takže se tato začne po stole smýkat rychlostí o počáteční velikosti v_0 . Koeficient smykového tření mezi plátnem stolu a koulí je μ . Díky tření se koule postupně roztáčí, až se začne pohybovat čistě valivým pohybem (kutálet). Jakou konečnou rychlostí se bude koule kutálet?

Příklad 7.22: Míč a schod



Míč (homogenní koule o poloměru a) se kutálí po vodorovné rovině proti schodu výšky $h < a$ rychlostí o velikosti v . Jaká nejmenší musí tato rychlost být, aby míč schod překonal? Předpokládejte, že srážka je nepružná a míč se po schodu nesklouzne.

Nápověda: Využijte skutečnosti, že moment hybnosti míče vzhledem k bodu dotyku se schodem se v okamžiku srážky (dotyku se schodem) nemění!

Řešení:

Vypočítáme velikost momentu hybnosti L_s míče vzhledem k rohu schodu těsně před srážkou. Míč se jednak otáčí kolem své osy úhlovou rychlostí $\omega_0 = v/a$ a jednak se posouvá vzhledem ke schodu rychlostí v . Můžeme proto psát

$$L_s = J_0 \omega_0 + amv \sin \alpha = \frac{1}{5}(7a - 5h)mv,$$

kde bylo dosazeno $J_0 = 2/5 ma^2$ a $\sin \alpha = (a - h)/a$ a kde m je hmotnost míče.

Jestliže je srážka nepružná a míč o roh schodu neproklouzne, začne se kolem něho otáčet úhlovou rychlostí ω_{s0} , kterou vyjádříme ze vztahu

$$J\omega_{s0} = L_s,$$

kde J je moment setrvačnosti míče vzhledem k bodu ležícímu na jeho povrchu (rohu schodu). Počáteční kinetickou energii tohoto otáčivého pohybu můžeme vyjádřit jako

$$E_k = \frac{1}{2} J \omega_{s0}^2 = \frac{L_s^2}{2J}.$$

Vyjádříme-li moment setrvačnosti ze Steinerovy věty

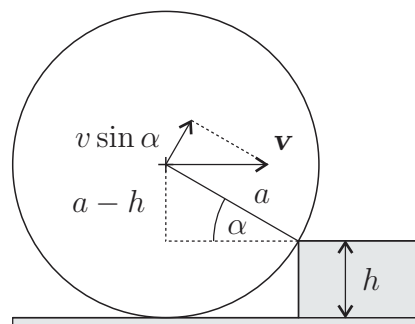
$$J = \frac{2}{5} ma^2 + ma^2 = \frac{7}{5} ma^2,$$

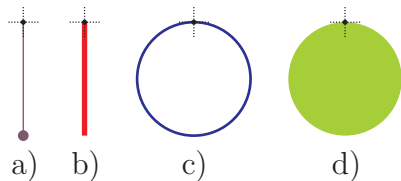
můžeme pro počáteční kinetickou energii psát

$$E_k = \frac{5}{14} \left(\frac{7a - 5h}{5a} \right)^2 mv^2.$$

Dostane-li se míč na schod, klesne jeho kinetická energie o $\Delta E = mgh$, takže musí platit

$$\frac{5}{14} \left(\frac{7a - 5h}{5a} \right)^2 mv^2 \geq mgh \quad \Rightarrow \quad v \geq \frac{\sqrt{\frac{10}{7}gh}}{1 - \frac{5h}{7a}}.$$

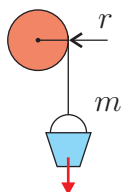


Příklad 7.23: Různá kyvadla

Máme čtyři objekty, které jsou zavěšeny tak, aby mohly kývat kolem pevné osy: a) matematické kyvadlo (hmotný bod zavěšený na nehmotném závěsu délky L), b) tenkou tyčku délky l , c) obruč o poloměru r_o a d) kruhová deska o poloměru r_d . Určete, jaké rozměry musí mít tyčka, obruč a kruhová deska, aby kývaly stejně jako matematické kyvadlo. Tlumení kyvadel zanedbejte.

Příklad 7.24: Minimální perioda

V jaké vzdálenosti od středu homogenní kruhové desky o poloměru R musí být osa otáčení (rovnoběžná s osou desky), aby perioda takto vytvořeného kyvadla byla minimální?

Příklad 7.25: Rumpál ještě jednou

Na rumpálu o poloměru r a momentu setrvačnosti J je na namotaném laně zavěšen kbelík o hmotnosti m . S jakým zrychlením padá kbelík do studně, pokud se může rumpál volně otáčet a hmotnost lana můžeme zanedbat?

Příklad 7.26: Tovární komín

Starý tovární komín výšky h tvaru dutého válce byl u základny podkopán a spadl. Jakou rychlostí dopadl na zem jeho nejvyšší bod? Bod v jaké výšce z dopadl na zem stejnou rychlostí, jako kdyby padal volným pádem?

Řešení: Pád můžeme popsat jako otáčivý pohyb komínu kolem základny a využít ZZE

$$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2},$$

kde indexem 1 je označen stav před začátkem pádu a indexem 2 stav při dopadu. Jelikož pro moment setrvačnosti homogenní tyče vzhledem k ose procházející kolmo jejím okrajem (je zřejmě stejný jako pro náš komín) platí $J = mh^2/3$ a poloha těžiště komínu je ve výšce $h_T = h/2$, můžeme ZZE přepsat do tvaru

$$0 + mgh_T = \frac{1}{2}J\omega^2 + 0 \quad \Rightarrow \quad mg\frac{h}{2} = \frac{1}{6}mh^2\omega^2 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{3g}{h}. \quad (1)$$

Jelikož pro vztah mezi obvodovou a úhlovou rychlostí pohybu po kružnici o poloměru h platí $v = \omega h$, dostaneme pro rychlost dopadu vrcholu komínu vztah

$$v = \sqrt{3gh}.$$

Odtud je vidět, že vrchol komínu dopadne na zem rychlostí větší, než kdyby padal volným pádem, čemuž odpovídá rychlost $v_{vp} = \sqrt{2gh}$.

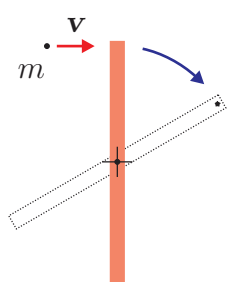
Pro obvodovou rychlost bodu původně ve výšce z platí $v_z = \omega z$, dosazením do pravého vztahu (1) dostaneme

$$v_z = \sqrt{\frac{3gz^2}{h}}.$$

Jelikož se tato rychlost má rovnat rychlosti dopadu volným pádem z výšky z , tedy $v_{vpz} = \sqrt{2gz}$, dostaneme tuto výšku porovnáním posledních dvou vztahů

$$v_z = v_{vpz} \quad \Rightarrow \quad \frac{3gz^2}{h} = 2gz \quad \Rightarrow \quad z = \frac{2}{3}h.$$

■ Příklad 7.27: Výstřel na tyč



Homogenní dřevěná tyč délky $l = 1$ m a hmotnosti $M = 2$ kg se může volně otáčet kolem osy, která prochází kolmo jejím těžištěm. Byla do ní vypálena střela kolmo k ose rotace i tyči, která se zasekla na jejím konci. Velikost rychlosti střely $v = 200 \text{ m s}^{-1}$, její hmotnost $m = 10$ g. Jakou úhlovou rychlostí se tyč se zaseknutou střelou roztočila?

■ Příklad 7.28: Úder do volně ležící tyčky

Tyčka délky $l = 1,2$ m a hmotnosti $m = 0,1$ kg leží na dokonale hladké vodorovné rovině. Na jeden konec tyčky bylo kolmo vodorovně udeřeno, přičemž velikost impulsu úderu byla $I = 10^{-2}$ Ns. Vypočtete, jakou rychlostí \mathbf{v}_s se pohybuje hmotný střed tyčky po úderu. Vypočtete, jakou úhlovou rychlostí ω se tyčka po úderu otáčí. Vypočtete, jakou vzdálenost L tyčka urazí, než vykoná jednu otočku.

■ Příklad 7.29: Jak přemístit bednu

Bednu tvaru krychle je třeba přemístit do určité vzdálenosti, která se rovná celočíselnému násobku délky její hrany. Jednou ji táhneme po zemi, podruhé převracíme přes hranu. Koeficient smykového tření mezi bednou a zemí je μ . Pro jaké μ je práce vykonaná v obou případech přepravy stejná?

■ Příklad 7.30: Jak pootočit kosmickou loď

V ose kosmické lodi je umístěn elektromotor, moment setrvačnosti jehož rotoru vzhledem k ose otáčení je $J_s = 2 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$. Kolikrát se musí rotor vzhledem k palubě kosmické lodi otočit, má-li se tato pootočit o úhel $\varphi_1 = 30^\circ$? Moment setrvačnosti **celé** lodi vzhledem k ose otáčení je $J_l = 12 \text{ kg m}^2$.

Řešení: Nepůsobí-li na kosmickou loď žádně vnější momenty sil, jedná se o izolovanou soustavu a platí zákon zachování momentu hybnosti

$$\sum_{n=1}^N J_n \omega_n = \text{konst.}$$

Jestliže byl vzhledem k nějaké IVS celkový moment hybnosti lodi a rotoru před jeho roztočením nulový, zůstane nulový i po jeho spuštění a bude platit

$$J_r \omega_{ri} + (J_l - J_r) \omega_{li} = 0,$$

kde ω_{ri} a ω_{li} jsou úhlové rychlosti rotoru a lodi vzhledem k IVS. Jelikož pro úhlovou rychlost rotoru vzhledem k IVS platí $\omega_{ri} = \omega_{rl} + \omega_{li}$, kde ω_{rl} je úhlová rychlost rotoru vzhledem k lodi, můžeme ZZMH přepsat do tvaru

$$J_r(\omega_{rl} + \omega_{li}) + (J_l - J_r) \omega_{li} = 0 \quad \Rightarrow \quad J_r \omega_{rl} = -J_l \omega_{li},$$

loď se tedy bude otáčet opačným směrem než rotor.

Integrací posledního výrazu dostaneme

$$\varphi_{rl} = \int \omega_{rl} dt = -\frac{J_l}{J_r} \int \omega_{li} dt = -\frac{J_l}{J_r} \varphi_l.$$

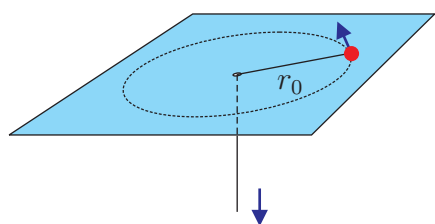
Pro počet otáček, které musí rotor vykonat pak platí

$$n = \frac{|\varphi_{rl}|}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{J_l}{J_r} \varphi_l = 500.$$

■ Příklad 7.31: Na kolotoči

Člověk o hmotnosti $m = 80 \text{ kg}$ stojí na okraji vodorovné kruhové desky o poloměru $r = 5 \text{ m}$, která se může volně (bez tření) otáčet kolem své osy. Vypočítejte, jakou úhlovou rychlostí a jakým směrem se bude deska, která byla původně v klidu otáčet, pokud člověk po jejím obvodu začne kráčet rychlostí $v = 1,5 \text{ m s}^{-1}$. Moment setrvačnosti desky je $J_d = 4000 \text{ kg m}^2$, rozměry člověka (vzhledem k desce) zanedbejte.

■ Příklad 7.32: Kulička na stole



energie E_{k0} .

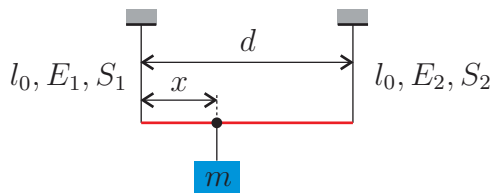
Na vodorovném, dokonale hladkém stole rotuje na provázku malá kulička po kruhové trajektorii s poloměrem r_0 . Provázek, jehož hmotnost můžeme zanedbat, je provlečen otvorem skrz desku stolu. Vypočítejte, jakou práci musíme vykonat, abychom zatáhnutím za provázek zmenšili poloměr trajektorie kuličky na polovinu, jestliže byla původně její kinetická

8. Pružnost a pevnost

■ Příklad 8.1: Tržná délka drátu

Jakou délku l musí mít měděný drát zavěšený za jeden konec, aby se přetrhl vlastní vahou? Pro hustotu mědi a mez pevnosti platí $\rho = 8930 \text{ kg m}^{-3}$, $\sigma_p = 200 \text{ MPa}$.

■ Příklad 8.2: Jak zavěsit břemeno



Najděte vzdálenost x , do které je na nosník zanedbatelné hmotnosti třeba zavěsit břemeno hmotnosti m , aby **a)** mechanické napětí v obou závěsích bylo stejné a **b)** prodloužení obou závěsů bylo stejné.

Délka obou závěsů l_0 bez zatížení je stejná, průřezy a moduly pružnosti závěsů jsou různé (S_1, E_1, S_2, E_2).

Řešení:

Velikost sil F_1 a F_2 napínajících závěsy získáme z podmínek statické rovnováhy. Pro výslednici sil musí platit

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_g = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad F_1 + F_2 - F_g = 0,$$

kde $\mathbf{F}_g = m\mathbf{g}$ je tíhová síla působící na břemeno.

Nulový musí být i výsledný moment sil. Vzhledem k levému místu uchycení závěsu k nosníku můžeme psát

$$\mathbf{M}_{F_1} + \mathbf{M}_{F_g} + \mathbf{M}_{F_2} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad -xF_g + dF_2 = 0.$$

Z těchto podmínek plyne

$$F_1 = \frac{d-x}{d}F_g, \quad F_2 = \frac{x}{d}F_g.$$

Ad a) Hledáme polohu břemene x takovou, aby mechanické napětí v obou závěsích bylo stejné. Musí platit

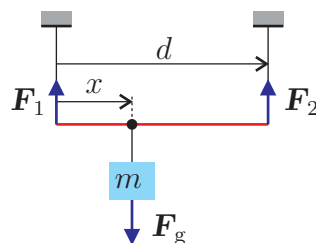
$$\sigma = \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{d-x}{d} \frac{F_g}{S_1} = \frac{x}{d} \frac{F_g}{S_2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1/S_1}{1/S_1 + 1/S_2} d = \frac{d}{1 + S_1/S_2}.$$

Ad b) Hledáme polohu břemene x takovou, aby prodloužení obou závěsů Δl bylo stejné. Z Hookova zákona dostaneme

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta l}{l_0} \quad \Rightarrow \quad \Delta l = \frac{l_0 F}{ES}.$$

Aby bylo prodloužení obou závěsů stejné, musí platit

$$\Delta l_1 = \frac{l_0 F_1}{E_1 S_1} = \frac{(d-x)l_0 F_g}{d E_1 S_1} = \Delta l_2 = \frac{l_0 F_2}{E_2 S_2} = \frac{x l_0 F_g}{d E_2 S_2},$$



odtud pak dostaneme

$$x = \frac{d/(E_1 S_1)}{1/(E_1 S_1) + 1/(E_2 S_2)} = \frac{d}{1 + E_1 S_1/E_2 S_2}.$$

■ **Příklad 8.3: Šplh po pružném laně**

Lano délky l_0 volně visí zavěšené za jeden konec. Jakou práci musí vykonat člověk hmotnosti m , aby vyšplhal po celé délce lana **a)** za předpokladu, že lano je tuhé a **b)** za předpokladu, že jeho modul pružnosti je E , průřez S a hmotnost lana můžeme zanedbat?

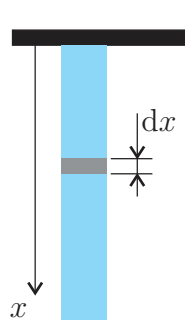
■ **Příklad 8.4: Komolý kužel**

Komolý kužel o poloměrech základů r_1 , r_2 a výšce h je stlačen silou o velikosti F ve směru své osy. O jakou vzdálenost Δh se zmenší jeho výška, jestliže zatížení je rovnoměrné v každém průřezu kolmém k ose a modul pružnosti materiálu kužele je E ?

■ **Příklad 8.5: Prodloužení tyče vlastní vahou**

O jakou délku Δl se prodlouží vlastní vahou tyč délky l a průřezu S zavěšená za jeden konec, jestliže její materiál má hustotu ρ a Youngův modul pružnosti E ?

Řešení:



Pro element tyče délky dx můžeme psát Hookův zákon ve tvaru

$$\sigma = E \frac{d(\Delta l)}{dx},$$

kde σ je mechanické napětí uvažovaného elementu, $d(\Delta l)/dx$ je jeho relativní prodloužení (deformace) a E je Youngův modul pružnosti. Mechanické napětí v elementu délky dx nacházejícím se ve vzdálenosti x od místa uchycení je způsobeno tíhou části tyče pod ním a můžeme pro něj psát

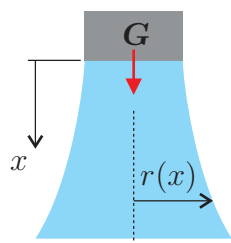
$$\sigma = \frac{F'_g}{S} = \frac{m'_g}{S} = \rho g(l - x).$$

Dosazením do Hookova zákona můžeme psát

$$d(\Delta l) = \frac{\rho g}{E}(l - x)$$

a celkové prodloužení dostaneme integrací přes celou délku tyče

$$\Delta l = \frac{\rho g}{E} \int_0^l (l - x) dx = \frac{\rho g l^2}{2E}.$$

Příklad 8.6: Pilíř

Nosný pilíř z materiálu o hustotě ρ kruhového průřezu má podepírat břemeno tíhy G . Jaká musí být závislost poloměru pilíře $r(x)$ na vzdálenosti od břemene, aby normálové napětí σ_0 bylo po celé jeho délce konstantní?

9. Gravitační pole

■ **Příklad 9.1: Geostacionární družice**

Vypočítejte, do jaké výšky h nad povrch Země je třeba umístit umělou družici a jakou rychlost jí je třeba udělit, aby byla geostacionární, tj. její poloha vzhledem k Zemi byla neproměnná.

Řešení: Na družici působí Země gravitační silou

$$\mathbf{F}_g = -\kappa \frac{mM_Z}{r^3} \mathbf{r}, \quad (1)$$

kde κ je gravitační konstanta, m je hmotnost družice, M_Z je hmotnost Země a \mathbf{r} je polohový vektor družice vzhledem ke středu Země.

Má-li se družice pohybovat po kruhové trajektorii, musí se pohybovat s dostředivým zrychlením

$$\mathbf{a}_d = -\frac{v^2}{r^2} \mathbf{r},$$

kde $v = konst.$ je velikost rychlosti družice, které je podmíněno působením dostředivé síly

$$\mathbf{F}_d = m\mathbf{a}_d = -m \frac{v^2}{r^2} \mathbf{r}. \quad (2)$$

Príslušná dostředivá síla je realizována právě silou gravitační, takže porovnáním vztahů (1) a (2) dostaneme

$$-\kappa \frac{mM_Z}{r^3} \mathbf{r} = -m \frac{v^2}{r^2} \mathbf{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{r^2} \left(v^2 - \frac{\kappa M_Z}{r} \right) \mathbf{r} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{\kappa M_Z}{r}. \quad (3)$$

Ve vztahu (3) jsou dvě neznámé. Soustavu rovnic uzavřeme podmínkou pro geostacionárnost – perioda rotace družice po kruhové trajektorii musí být rovna periodě rotace Země T_Z , tudíž pro obvodovou rychlost musí platit

$$v = \omega r = \frac{2\pi}{T_Z} r. \quad (4)$$

Vyřešením soustavy algebraických rovnic (3) a (4) dostaneme výšku družice nad povrchem Země

$$h = r - R_Z = \sqrt[3]{\frac{\kappa M_Z T_Z^2}{4\pi^2}} - R_Z = 35\,833 \text{ km}$$

a obvodovou rychlost (rychlost, kterou musíme družici udělit)

$$v = \sqrt[3]{\frac{2\pi \kappa M_Z}{T_Z}} = 3\,071 \text{ m s}^{-1}.$$

⊙ **Příklad 9.2: Lano visící z nebe**

Do jaké minimální vzdálenosti od Země by muselo dosahovat dokonale pevné lano, aby mohlo být uchyceno někde na rovníku a sloužilo k výtahové dopravě na geostacionární dráhu?

■ **Příklad 9.3: Potenciální energie gravitačního a tíhového pole**

Ukažte jak vyplývá vzorec pro potenciální energii v homogenním tíhovém poli Země $E_{pT} = mgh$ z Newtonova gravitačního zákona.

Řešení: Pro potenciální energii v gravitačním poli Země platí

$$E_{pG} = -\kappa \frac{mM_Z}{r} + C, \quad r \geq R_Z,$$

kde C je libovolná konstanta, obvykle pro jednoduchost volíme $C = 0$.

Provedeme Taylorův rozvoj kolem bodu $r = R_Z$, pro $h = r - R_Z$ platí

$$\begin{aligned} E_{pG} &= E_{pG} \Big|_{r=R_Z} + \frac{dE_{pG}}{dr} \Big|_{r=R_Z} (r - R_Z) + \frac{1}{2} \frac{d^2 E_{pG}}{dr^2} \Big|_{r=R_Z} (r - R_Z)^2 + \dots = \\ &= \left(-\kappa \frac{mM_Z}{R_Z} + C \right) + \kappa \frac{mM_Z}{R_Z^2} h - \kappa \frac{mM_Z}{R_Z^3} h^2 + \dots \end{aligned}$$

První člen Taylorova rozvoje je konstantní. Bude-li platit $h \ll R_Z$, můžeme třetí člen (a členy vyšších řádů) zanedbat oproti členu druhému. Označíme-li $g = \kappa M_Z / R_Z^2$, můžeme psát

$$E_{pG} \approx -\kappa \frac{mM_Z}{R_Z} + C + mgh.$$

Zvolíme-li $C = \kappa m M_Z / R_Z$, dostaneme

$$E_{pG} \approx mgh = E_{pT}.$$

Vzorec $E_p = mgh$ je tedy pouze přibližný a můžeme jej používat pouze pro malé výšky h , zanedbatelné oproti R_Z .

■ **Příklad 9.4: Halleyova kometa**

Oběžná doba (perioda) Halleyovy komety $T_H = 76$ let. Vypočítejte, jaká je délka velké poloosy a_H její trajektorie, vzdálenost afelia r_{\max} a numerická výstřednost ε_H , jestliže pro vzdálenost perihelia platí $r_{\min} = 0,6$ AU. Pro velkou poloosu oběžné trajektorie Země přibližně platí $a_Z = 1$ AU.

⊙ **Příklad 9.5: Sputnik 1**

První umělá družice Země, Sputnik 1, vypuštěná Sovětským svazem v roce 1957, měla perigeum ve výšce $h_p = 227$ km nad zemí a její rychlost v perigeu byla $v_p = 8$ km s⁻¹. Vypočítejte výšku apogea h_a Sputniku 1 nad zemí a oběžnou periodu T . Pro hmotnost Země platí $M_Z = 5,97 \times 10^{24}$ kg, pro poloměr Země $R_Z = 6378$ km.

Řešení: Zanedbáme-li brzdění družice o atmosféru, můžeme vyjít ze ZZE a ZZMH. Pro mechanickou energii družice v perigeu (p) a apogeu (a) můžeme psát

$$\frac{1}{2} m v_p^2 - \kappa \frac{m M_Z}{r_p} = \frac{1}{2} m v_a^2 - \kappa \frac{m M_Z}{r_a} \quad \Rightarrow \quad v_p^2 - \frac{2\kappa M_Z}{r_p} = v_a^2 - \frac{2\kappa M_Z}{r_a}.$$

V perigeu a apogeu je vektor rychlosti družice kolmý k polohovému vektoru, takže pro moment hybnosti vzhledem k Zemi můžeme psát

$$r_p m v_p = r_a m v_a \quad \Rightarrow \quad r_p v_p = r_a v_a.$$

Vyloučením rychlosti družice v apogeu a algebraickou úpravou předchozích rovnic dostaneme kvadratickou rovnici pro vzdálenost apogea od středu Země

$$(2\kappa M_Z - r_p v_p^2) r_a^2 - 2\kappa M_Z r_p r_a + v_p^2 r_p^2 = 0.$$

Řešením kvadratické rovnice dostaneme

$$r_{a1,2} = \frac{\kappa M_Z r_p \pm (\kappa M_Z r_p - r_p^2 v_p^2)}{2\kappa M_Z - r_p v_p^2},$$

kde kladné znaménko vede na nezajímavé řešení $r_a = r_p$, zatímco znaménko záporné vede na hledanou hodnotu

$$r_a = \frac{r_p^2 v_p^2}{2\kappa M_Z - r_p v_p^2}.$$

Dosazením číselných hodnot pro výšku apogea nad zemí dostaneme

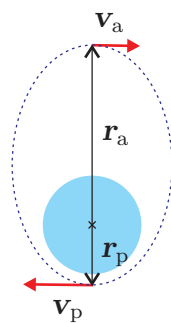
$$h_a = r_a - R_Z = 1089 \text{ km}.$$

Pro délku velké poloosy platí

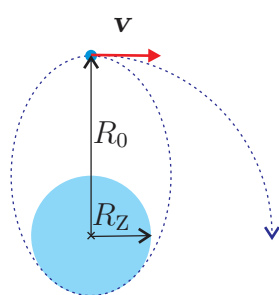
$$a = \frac{r_a + r_p}{2} = \frac{h_a + h_p + 2R_Z}{2} = 7036 \text{ km}.$$

Periodu oběhu kolem Země dostaneme ze třetího Keplerova zákona jako

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\kappa M_Z}{4\pi^2} \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\kappa M_Z}} = 98 \text{ minut}.$$



■ Příklad 9.6: Nejmenší rychlost družice



Ve vzdálenosti R_0 od středu Země je vodorovně vystřelena určitou rychlostí umělá družice. Jaká musí být velikost této rychlosti v_{kr} , aby se pohybovala po kruhové trajektorii? Jaká musí být minimální velikost rychlosti v_{min} , aby tato družice nedopadla na Zemi?

Nápověda: Vzdálenost perigee eliptické trajektorie musí být právě rovna poloměru Země R_Z .

■ Příklad 9.7: Doba oběhu družice kolem planety

Jak souvisí perioda družice obíhající planetu v její těsné blízkosti po kruhové trajektorii s průměrnou hustotou planety?

Příklad 9.8: Hmotnost Slunce

Vypočítejte hmotnost Slunce M_S z doby oběhu Země T_Z a z poloměru její dráhy $R_{ZS} = 149,5 \times 10^6$ km o níž se předpokládá, že je kruhová. Jaká je oběžná rychlost Země kolem Slunce?

Řešení: Slunce na Zemi, obíhající zhruba po kružnici o poloměru R_{ZS} , působí gravitační silou o velikosti

$$F_{ZS} = \kappa \frac{M_S M_Z}{R_{ZS}^2}. \quad (1)$$

Fakt, že se Země pohybuje po kruhové trajektorii znamená, že se pohybuje s dostředivým zrychlením, které způsobuje dostředivá síla o velikosti

$$F_d = M_Z \frac{v^2}{R_{ZS}}. \quad (2)$$

Pro obvodovou rychlost Země zřejmě platí

$$v = \frac{2\pi R_{ZS}}{T_Z} = 29,8 \text{ km s}^{-1}. \quad (3)$$

Jelikož dostředivou sílu realizuje síla gravitační, dostaneme porovnáním vztahů (1) a (2) s využitím (3) výsledek

$$\frac{R_{ZS}^3}{T_Z^2} = \frac{\kappa M_S}{4\pi^2} \quad \Rightarrow \quad M_S = \frac{4\pi^2 R_{ZS}^3}{\kappa T_Z^2} = 1,99 \times 10^{30} \text{ kg}.$$

Příklad 9.9: Hmotnost Jupiteru

Měsíc obíhá kolem Země po eliptické trajektorii s velkou poloosou $a_M = 384\,400$ km s periodou³ $T_M = 27,32$ dne. Největší měsíc Jupiteru (a současně celé sluneční soustavy) Ganymed se pohybuje po trajektorii s velkou poloosou $a_G = 1\,070\,000$ km s periodou $T_G = 7,15$ dne. Kolikrát větší je hmotnost Jupiteru oproti Zemi?

Příklad 9.10: Svislý vrh do velké výšky

Do jaké výšky h vystoupí těleso vrhnuté svisle vzhůru z povrchu Země rychlostí o velikosti v_0 ? Jaká musí být tato rychlost, aby těleso již nedopadlo zpět? Odpor vzduchu zanedbejte.

Řešení: Vyjdeme-li ze zákona zachování energie, můžeme psát

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - \kappa \frac{mM_Z}{r} = \text{konst.},$$

kde M_Z je hmotnost Země a $r \geq R_Z$ je vzdálenost od středu Země. Na povrchu Země, odkud je těleso vrženo, platí $v = v_0$, $r = R_Z$, ve výšce h , do které má vystoupat, pak platí $v = 0$, $r = R_Z + h$. Dosazením do ZZE dostaneme

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \kappa \frac{mM_Z}{R_Z} = -\kappa \frac{mM_Z}{R_Z + h} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{v_0^2 R_Z^2}{2\kappa M_Z - v_0^2 R_Z}.$$

³Jedná se o tzv. siderickou periodu, tedy vzhledem ke hvězdám. Synodická perioda (od novu k novu) trvá 29,53 dne.

Aby těleso nedopadlo zpět na Zemi, musí se výška h limitně blížit k nekonečnu, odkud dostaneme

$$2\kappa M_Z - v_0^2 R_Z = 0 \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{2\kappa M_Z}{R_Z}} \approx 11,2 \text{ km s}^{-1},$$

této rychlosti říkáme druhá kosmická rychlost.

● **Příklad 9.11: III. kosmická rychlost**

Vypočítejte nejmenší rychlost, kterou je třeba udělit projektilu na povrchu Země, aby se mohl vymanit z gravitačního pole Slunce⁴. Vliv atmosféry Země zanedbejte.

Nápověda: Projektil je třeba vystřelit ve směru vektoru okamžité oběžné rychlosti Země kolem Slunce.

■ **Příklad 9.12: Nulová gravitace mezi Měsícem a Zemí**

V jaké vzdálenosti od středu Země je na spojnici Země-Měsíc velikost gravitační síly působící na těleso o hmotnosti m nulová? Vzdálenost Země-Měsíc je d , pro hmotnost měsíce použijte $M_M = M_Z/81$.

■ **Příklad 9.13: Pokusy na Zemi a Měsíci**

Vypočítejte, kolikrát výše vyskočíte na Měsíci oproti Zemi za předpokladu, že na obou tělesech jste schopni vyvinout stejný impuls síly. Vypočítejte, kolikrát rychleji jdou kyvadlové hodiny na Měsíci oproti stejným hodinám na Zemi.

■ **Příklad 9.14: Skok do nekonečna**

Řekněme, že průměrně zdatný člověk vyskočí na povrchu Země do výšky $h = 1 \text{ m}$. Představme si dále, že tento člověk stojí na povrchu planetky, jejíž hustota je stejná, jako je průměrná hustota Země. Jaký poloměr by planetka musela mít, aby se tento člověk výskokem vzhůru vymanil z jejího gravitačního vlivu? Předpokládejme přitom, že na Zemi i planetce je schopen při výskoku vyvinout stejný impuls síly.

Řešení: Jelikož je člověk před výskokem v klidu, dostaneme pro počáteční rychlost výskoku v_0

$$I = mv_0 \quad \Rightarrow \quad v_0 = \frac{I}{m},$$

což znamená, že počáteční rychlost výskoku je při konstantním impulsu síly I na obou tělesech stejná.

Známe-li výšku výskoku h na povrchu Země, ze ZZE snadno spočteme počáteční rychlost výskoku

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{2gh} = 4,43 \text{ m s}^{-1}. \quad (1)$$

⁴Neuvažujte možnost gravitační asistence dalších planet.

Aby se pokusná osoba vymanila z gravitačního pole planetky, musí být tato rychlost minimálně rovna únikové rychlosti z jejího povrchu. Velikost únikové rychlosti dostaneme ze ZZE

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \kappa \frac{mM_p}{R_p} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{2\kappa M_p}{R_p}}, \quad (2)$$

kde M_p a R_p jsou hmotnost a poloměr planetky. Nula na pravé straně rovnice vyjadřuje skutečnost, že vymanit se z gravitačního působení znamená dostat se do nekonečné vzdálenosti od gravitujícího objektu (nulová potenciální energie), kinetická energie zde může být nulová.

Pro hmotnost planetky platí

$$M_p = \rho V_p = \frac{4}{3}\pi R_p^3 \rho, \quad (3)$$

kde pro hustotu ρ dále dostaneme

$$\rho = \frac{M_Z}{V_Z} = \frac{3M_Z}{4\pi R_Z^3},$$

takže vztah (3) lze přepsat do tvaru

$$M_p = M_Z \frac{R_p^3}{R_Z^3}. \quad (4)$$

Dosazením posledního výrazu do vztahu (2) a porovnáním výsledku s (1) dostaneme

$$2gh = \frac{2\kappa M_Z R_p^2}{R_Z^3}.$$

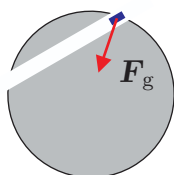
Uvědomíme-li si, že pro tíhové zrychlení na povrchu Země můžeme psát

$$g = \frac{\kappa M_Z}{R_Z^2},$$

dostaneme dosazením do předchozí rovnice výsledek

$$R_p = \sqrt{hR_Z} = 2,53 \text{ km}.$$

■ Příklad 9.15: Vlak poháněný gravitací



Doprava na velké vzdálenosti by v budoucnu mohla být vyřešena následujícím způsobem. Mezi vzdálenými místy na Zemi vykopeme přímý tunel, umístíme do něj vlak a jeho pohon svěříme gravitaci. Pokud bychom mohli zanedbat tření a odpor prostředí, jak dlouho by trvala cesta od jednoho konce tunelu ke druhému? Uvažujte, že Země je homogenní.

Nápověda: Při řešení využijte skutečnosti, že na vlak bude gravitačně působit pouze hmota v myšlené kouli o poloměru rovném vzdálenosti vlaku od středu Země.

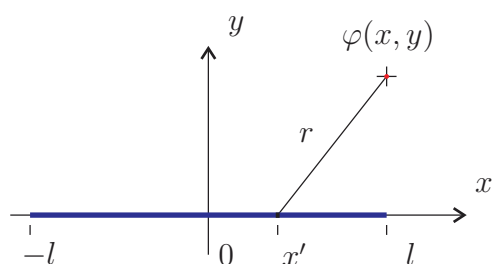
■ **Příklad 9.16: Stejná gravitace nad i pod povrchem Země**

Najděte takovou vzdálenost h od povrchu Země, ve které je velikost intenzity gravitačního pole nad i pod zemským povrchem stejná. Předpokládejte přitom, že je Země homogenní.

■ **Příklad 9.17: Volný pád na Slunce (matematicky náročnější)**

Kosmická loď se nachází ve vzdálenosti $R = R_{ZS} = 149,5 \times 10^6$ km od Slunce, je vzhledem k němu v klidu a kosmonauti provádí fyzikální experiment. Přitom omylem vypustí do volného prostoru veškeré palivo pro pohon lodi. Vypočítejte, jak dlouho bude padat kosmická loď na Slunce. Poloměr Slunce je $R_S = 696\,000$ km.

⊙ **Příklad 9.18: Potenciál a intenzita gravitačního pole v okolí tyče (obecně)**



Vypočítejte potenciál a intenzitu gravitačního pole v okolí tenké homogenní tyče délky $2l$ a hmotnosti M .

■ **Příklad 9.19: Potenciál a intenzita gravitačního pole v ose tyče**

Vypočítejte potenciál a intenzitu gravitačního pole v ose tenké tyče délky $2l$ a hmotnosti M ve vzdálenosti $x > l$ od jejího středu.

Řešení: Budeme-li tenkou tyč považovat za jednorozměrné těleso, můžeme pro potenciál ve vzdálenosti x od jejího středu psát

$$\varphi(x) = -\kappa \int_{-l}^l \frac{\mu dx'}{|x - x'|} + C,$$

kde $\mu = M/2l$ je hmotnost vztažená na jednotku délky a C je (libovolná) konstanta. Pro potenciál tedy můžeme psát

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= -\frac{\kappa M}{2l} \int_{-l}^l \frac{dx'}{x - x'} = \left| \begin{array}{l} z = x - x' \Rightarrow dz = -dx' \\ -l \rightarrow x + l, \quad l \rightarrow x - l \end{array} \right| = \frac{\kappa M}{2l} \int_{x+l}^{x-l} \frac{dz}{z} = \\ &= \frac{\kappa M}{2l} \left[\ln |z| \right]_{x+l}^{x-l} = \frac{\kappa M}{2l} \ln \left| \frac{x-l}{x+l} \right| = \frac{\kappa M}{2l} \ln \left(\frac{x-l}{x+l} \right) + C. \end{aligned}$$

Jelikož pro intenzitu gravitačního pole platí $\mathbf{K} = -\nabla\varphi$, můžeme pro x -ovou složku tohoto vektoru psát

$$K_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{\kappa M}{x^2 - l^2}. \quad (1)$$

Jelikož úloha je rotačně symetrická, musí tuto symetrii vykazovat i potenciál a z toho důvodu musí být v ose tyče složka vektoru intenzity pole kolmá k ose x nulová, tedy $K_{\perp} = 0$.

Pokud by platilo $x \gg l$, můžeme výraz (1) zjednodušit do tvaru

$$K_x \approx -\frac{\kappa M}{x^2},$$

gravitační pole ve velké vzdálenosti od tyče odpovídá gravitačnímu poli hmotného bodu stejné hmotnosti.

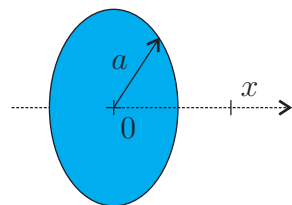
Příklad 9.20: Potenciál a intenzita gravitačního pole kolmo na osu tyče

Vypočítejte potenciál a intenzitu gravitačního pole ve vzdálenosti $y > 0$ od středu tenké tyče kolmo na její osu. Tyč má délku $2l$ a hmotnosti M .

Příklad 9.21: Potenciál a intenzita gravitačního pole v okolí hmotné přímky

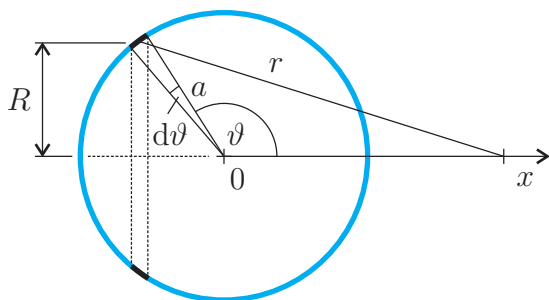
Vypočítejte potenciál a intenzitu gravitačního pole ve vzdálenosti $y > 0$ od (nekonečně dlouhé) přímky o délkové hustotě (= hmotnosti vztahované na jednotku délky) μ .

Příklad 9.22: Potenciál a intenzita gravitačního pole v ose kruhové desky



Vypočítejte potenciál a intenzitu gravitačního pole ve vzdálenosti $x > 0$ v ose homogenní tenké kruhové desky o poloměru a a hmotnosti M .

Příklad 9.23: Potenciál a intenzita gravitačního pole uvnitř a vně kulové slupky



Vypočítejte potenciál a intenzitu gravitačního pole ve vzdálenosti x od středu homogenní kulové slupky o poloměru a a hmotnosti M .

Řešení: Elementární úhel $d\vartheta$ vytíná na povrchu koule plochu, která má povrch

$$dS = 2\pi R dl = 2\pi a^2 \sin \vartheta d\vartheta,$$

kde $dl = a d\vartheta$ je délka oblouku vyřatého

úhlem $d\vartheta$.

Hmotnost této plošky je $dM = \mu dS$, kde $\mu = M/S$ je hmotnost vztahovaná na jednotku plochy a $S = 4\pi a^2$ je povrch koule. Protože vzdálenost každého bodu na elementární plošce od místa v ose, kde určujeme potenciál je stejná, můžeme pro ni z kosinové věty psát

$$r^2 = a^2 + x^2 - 2ax \cos \vartheta \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{a^2 + x^2 - 2ax \cos \vartheta}.$$

Pro potenciál vytvářený elementární plochou můžeme psát

$$\varphi = -\kappa \frac{dM}{r} = -\frac{\kappa M}{2} \frac{\sin \vartheta d\vartheta}{\sqrt{a^2 + x^2 - 2ax \cos \vartheta}}.$$

Pro potenciál vytvářený celou kulovou plochou tedy bude platit

$$\begin{aligned}\varphi &= \int_0^\pi d\varphi(\vartheta) = -\frac{\kappa M}{2} \int_0^\pi \frac{\sin \vartheta d\vartheta}{\sqrt{a^2 + x^2 - 2ax \cos \vartheta}} = \\ &= \left| \begin{array}{l} t = a^2 + x^2 - 2ax \cos \vartheta \Rightarrow dt = 2ax \sin \vartheta d\vartheta, \\ 0 \rightarrow (a-x)^2, \quad \pi \rightarrow (a+x)^2, \end{array} \right| = \\ &= -\frac{\kappa M}{4ax} \int_{(a-x)^2}^{(a+x)^2} \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{\kappa M}{2ax} \left[\sqrt{t} \right]_{(a-x)^2}^{(a+x)^2} = -\frac{\kappa M}{2ax} (|a+x| - |a-x|).\end{aligned}$$

Rozepsáním absolutních hodnot podle definice dostaneme

$$\varphi = \begin{cases} -\kappa M/a & \text{pro } x < a, \\ -\kappa M/x & \text{pro } x \geq a, \end{cases}$$

potenciál je tedy uvnitř slupky konstantní a vně je nepřímo úměrný první mocnině vzdálenosti od středu slupky.

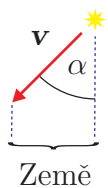
Z důvodu symetrie je zřejmé, že vektor intenzity gravitačního pole má radiální směr a pro příslušnou složku platí

$$K_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < a, \\ -\kappa M/x^2 & \text{pro } x > a, \end{cases}$$

Na hmotnou částici kdekoli uvnitř homogenní kulové slupky působí nulová síla, vně míří síla radiálně do středu kulové slupky a je shodná se silou, kterou by na částici působil hmotný bod o hmotnosti M umístěný na pozici středu kulové slupky.

10. Speciální teorie relativity

■ Příklad 10.1: Nadsvětelná rychlost?



Hvězda se pohybuje rychlostí o velikosti v pod úhlem α vzhledem k pozorovateli na Zemi. Jaká je zdánlivá rychlost pohybu hvězdy po obloze? Pod jakým úhlem by se hvězda musela pohybovat, aby tato rychlost byla největší? Jakou rychlostí by se pod tímto úhlem musela pohybovat, aby se pozorovateli zdánlivá rychlost hvězdy po obloze jevila jako nadsvětelná?

Řešení: Hvězda je v čase t_A v místě A, které je od pozorovatele ve vzdálenosti $d_A = d$. Pozorovatel se o tom dozví v čase $t'_A = t_A + d/c$, kde c je rychlost světla. Za čas Δt se přesune do místa B, které je od pozorovatele ve vzdálenosti $d_B = d - v\Delta t \cos \alpha$. Pozorovatel se o tom dozví v čase $t'_B = t_B + (d - v\Delta t \cos \alpha)/c$.

Pro zdánlivou rychlost, kterou se hvězda pohybuje po obloze tedy dostaneme

$$u = \frac{v_{\perp} \Delta t}{t'_B - t'_A} = \frac{v \Delta t \sin \alpha}{\Delta t (1 - \frac{v}{c} \cos \alpha)} = \frac{v \sin \alpha}{1 - \frac{v}{c} \cos \alpha}.$$

Najdeme úhel, pro který je rychlost u maximální

$$\frac{du}{d\alpha} = v \frac{\cos \alpha - \frac{v}{c}}{(1 - \frac{v}{c} \cos \alpha)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos \alpha = \frac{v}{c}.$$

Jelikož pro $u \in < 0, \pi/2 >$ platí $u \geq 0$, pro $\alpha = 0$ platí $u = 0$ a extrém je v tomto intervalu jenom jeden, jedná se o maximum, takže zdánlivá rychlost se jeví jako maximální, pokud

$$\alpha = \arccos \frac{v}{c}.$$

Bude-li se hvězda vzhledem k pozorovateli pohybovat pod tímto úhlem, bude pro zdánlivou rychlost platit

$$u_{\max} = v \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{1 - \frac{v}{c} \cos \alpha} = \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Dosazením za $u_{\max} = c$ zjistíme, že se tato rychlost bude pozorovateli jevit jako nadsvětelná, pokud bude platit

$$v > \frac{c}{\sqrt{2}}.$$

■ Příklad 10.2: Mion

Miony⁵ na Zemi vznikají interakcí kosmického záření s molekulami vrchní vrstvy atmosféry. Střední doba života mionu ve vztažné soustavě spojené s ním je $\tau = 2,2 \mu\text{s}$. Vypočítejte, jakou minimální rychlostí se mion pohybuje, jestliže jej jsme schopni detekovat na zemském povrchu.

Řešení: Vzhledem ke vztažné soustavě pevně spojené s mionem: Pohybuje-li se mion směrem k Zemi, je pro něj vzdálenost h zkrácena díky kontrakci délek na vzdálenost

$$h' = h \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

⁵Mion patří do rodiny leptonů, je to částice podobná elektronu, má oproti němu $207 \times$ větší hmotnost.

Tuto vzdálenost musí urazit rychlostí v za čas τ , takže odtud dostaneme

$$h\sqrt{1 - v^2/c^2} = v\tau \quad \Rightarrow \quad v = \frac{c}{\sqrt{1 + c^2\tau^2/h^2}} = 0,99976 c.$$

Úlohu stejně dobře vyřešíme ze vztažné soustavy spojené se Zemí. Pohybuje-li se mion vzhledem k pozorovateli na Zemi, naměří tento jeho dobu života prodlouženou díky dilataci času na

$$\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Mion za tuto dobu musí rychlostí v urazit vzdálenost h , takže musí platit

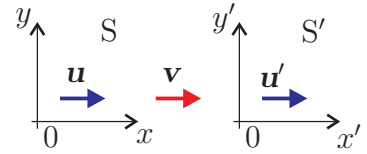
$$h = v\tau' = \frac{v\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{c}{\sqrt{1 + c^2\tau^2/h^2}}.$$

■ Příklad 10.3: Raketa

Raketa se od Země vzdaluje rychlostí $v = 0,5 c$ směrem ke vzdálenému cíli. Nedočkavá posádka vystřelí směrem k cíli menší průzkumné plavidlo rychlostí $u' = 0,5 c$ (vzhledem k raketě). Jakou rychlostí u se pohybuje průzkumné plavidlo vzhledem k Zemi?

Řešení:

Vzhledem k relativistickým rychlostem nelze použít Galileův vzorec pro skládání rychlostí $u = u' + v$, je třeba použít vzorec relativistický. Označme vztažnou soustavu spojenou s raketou jako S' a vztažnou soustavu spojenou se Zemí jako S . Vzhledem k Lorentzovým transformačním vzorcům



$$x = \gamma(x' + vt'), \quad t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right), \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

můžeme pro složku rychlosti u ve směru osy x , tedy rychlost průzkumného plavidla vzhledem k Zemi, psát

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + v dt'}{dt' + \frac{v}{c^2} dx'} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + v}{\frac{dt'}{dt} + \frac{v}{c^2} \frac{dx'}{dt}} = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2}.$$

Dosazením číselných hodnot dostaneme

$$u = \frac{0,5 c + 0,5 c}{1 + 0,25} = 0,8 c.$$

■ Příklad 10.4: Dvě rakety

K Zemi se blíží od Proximy Centauri raketa A rychlostí $u_1 = 0,9 c$, z opačného směru pak raketa B rychlostí $u_2 = 0,8 c$. Jakou rychlostí u se pohybují obě rakety vůči sobě?

■ Příklad 10.5: Světelné záblesky z rakety

Raketa se vzdaluje od Země rychlostí $v = 0,866c$. Posádka vyšle zpět k Zemi dva světelné záblesky s časovým odstupem $\Delta t' = 4\text{ s}$ (měřeno hodinami v raketě). S jakým časovým odstupem $\Delta \tau$ tyto signály zachytí v řídicím středisku na Zemi (měřeno hodinami na Zemi)?

■ Příklad 10.6: Relativistický pirát silnic

Drzý řidič projel křižovatkou na červenou. Policistovi, který jej zastavil, tvrdí, že prostě jel „trochu rychleji“ a červenou barvu semaforu tedy viděl jako zelenou. Jakou rychlostí by musel jet, aby červené světlo o vlnové délce $\lambda_c = 700\text{ nm}$ viděl jako světlo zelené o vlnové délce $\lambda_z = 550\text{ nm}$?

Nápověda: Vlnová délka je vzdálenost, kterou vlna (v našem případě světlo) urazí během jedné periody.

■ Příklad 10.7: Hustota

Jakou rychlostí se musí vůči pozorovateli pohybovat těleso, aby jeho hustota byla dvojnásobná oproti hustotě klidové?

⊙ Příklad 10.8: Nabitá částice v elektrickém poli

Na částici s nábojem q působí v elektrickém poli o intenzitě \mathbf{E} síla, pro kterou platí $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$. Vypočítejte časovou závislost rychlosti a polohy částice o klidové hmotnosti m_0 , umístěné v elektrickém poli o intenzitě $\mathbf{E} = (E, 0, 0)$, jestliže v čase $t = 0$ jsou její polohový vektor a rychlost nulové. Výpočet proveďte nerelativisticky i relativisticky a výsledky porovnejte.

Řešení: Jelikož jsou počáteční podmínky nulové a intenzita elektrického pole má nenulovou pouze x -ovou složku, bude se částice pohybovat podél této osy. Polohový vektor a vektor rychlosti tedy budou mít tvar $\mathbf{r} = (x, 0, 0)$, $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$.

Nerelativistický výpočet. Integrací pohybové rovnice dostaneme

$$m_0 \frac{dv}{dt} = qE \Rightarrow dv = \frac{qE}{m_0} dt \Rightarrow \int_0^v d\eta = \int_0^t \frac{qE}{m_0} d\zeta \Rightarrow v = \frac{qE}{m_0} t.$$

Z posledního vzorce vyplývá, že rychlost by lineárně narůstala a částice by dosáhla rychlosti světla v konečném čase $t_c = m_0 c / qE$, což je v rozporu se STR. Pro polohu částice platí

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{qE}{m_0} t \Rightarrow dx = \frac{qE}{m_0} t dt \Rightarrow \int_0^x d\eta = \int_0^t \frac{qE}{m_0} \zeta d\zeta \Rightarrow x = \frac{qE}{2m_0} t^2.$$

Relativistický výpočet. Jelikož se částice může pohybovat velkými rychlostmi, musíme použít k vyřešení úlohy relativistickou verzi pohybové rovnice

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = qE \Rightarrow \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \int_0^t qE d\eta = qEt.$$

Z posledního vzorce vyjádříme algebraickou úpravou rychlost

$$v = \frac{qEct}{\sqrt{m_0^2 c^2 + q^2 E^2 t^2}}.$$

Snadno se můžeme přesvědčit, že rychlost je rostoucí funkce, pro jejíž limitu v nekonečnu platí

$$v_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{qEct}{\sqrt{m_0^2 c^2 + q^2 E^2 t^2}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{t} \frac{qEc}{\sqrt{m_0^2 c^2/t^2 + q^2 E^2}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{qEc}{\sqrt{m_0^2 c^2/t^2 + q^2 E^2}} = c.$$

Výsledek tedy není v rozporu se STR, částice dosáhne rychlosti světla limitně až v nekonečném čase. Polohu částice dostaneme integrací rychlosti

$$\begin{aligned} x &= \int_0^t \frac{qEc\eta}{\sqrt{m_0^2 c^2 + q^2 E^2 \eta^2}} d\eta = \left| \begin{array}{l} \zeta = m_0^2 c^2 + q^2 E^2 \eta^2 \Rightarrow d\zeta = 2q^2 E^2 d\eta, \\ 0 \rightarrow m_0^2 c^2, \quad t \rightarrow m_0^2 c^2 + q^2 E^2 t^2 \end{array} \right| = \\ &= \frac{c}{2qE} \int_{m_0^2 c^2}^{m_0^2 c^2 + q^2 E^2 t^2} \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}} = \frac{c}{qE} \left[\sqrt{\zeta} \right]_{m_0^2 c^2}^{m_0^2 c^2 + q^2 E^2 t^2} = \frac{m_0 c^2}{qE} \left(\sqrt{1 + \frac{q^2 E^2 t^2}{m_0^2 c^2}} - 1 \right). \end{aligned}$$

Pro $q^2 E^2 t^2 / m_0^2 c^2 \ll 1$ můžeme vzorec pro polohu částice rozvinout do Taylorovy řady a psát

$$\sqrt{1+x} - 1 \approx 1 + \frac{x}{2} - 1 = \frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{qE}{2m_0} t^2,$$

což je nerelativistická verze s omezenou platností pouze pro malé rychlosti.



Příklad 10.9: Kinetická energie podle Einsteina a podle Newtona

Z relativistického vztahu pro kinetickou energii odvoďte vzorec pro kinetickou energii, který znáte z newtonovské mechaniky.

Řešení: Kinetickou energii v STR definujeme jako rozdíl mezi celkovou a klidovou energií, takže pro ni platí

$$E_{\text{kR}} = mc^2 - m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0 c^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right) m_0 c^2.$$

Relativistický vzorec musí pro $v/c \rightarrow 0$ přejít do tvaru vzorce newtonovské mechaniky. Položíme-li $x = v^2/c^2$ a uvážíme-li, že

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \dots,$$

můžeme pro kinetickou energii psát

$$E_{\text{kR}} = \frac{1}{2}m_0 v^2 + \frac{3}{8}m_0 \frac{v^4}{c^2} + \frac{5}{16}m_0 \frac{v^6}{c^4} + \dots$$

Nerelativistický vzorec pro kinetickou energii dostaneme limitním přechodem

$$\lim_{c \rightarrow \infty} E_{\text{kR}} = \frac{1}{2}m_0 v^2 = E_{\text{kN}}.$$

Nerelativistický vzorec pro kinetickou energii je pouze přibližný a platí jen pro malé rychlosti ($v/c \ll 1$).

■ **Příklad 10.10: Kinetická energie rovná klidové**

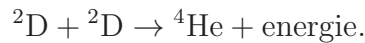
Jakou rychlostí se musí pohybovat v dané vztažné soustavě částice, aby její kinetická energie a energie klidová si byly navzájem rovny?

■ **Příklad 10.11: Průlet galaxií**

Vypočítejte, jakou dobu trvá průlet protonu kosmického záření naší Galaxií vzhledem ke vztažné soustavě spojené s galaxií a vzhledem ke vztažné soustavě spojené s protonem, jestliže jeho energie $E = 10^{10}$ GeV. Klidová energie protonu $E_0 = 938$ MeV, průměr Galaxie $d = 100\,000$ světelných let.

■ **Příklad 10.12: Jaderná fúze**

V roce 1970 spotřebovalo lidstvo energii ve výši $E = 5,5 \times 10^{13}$ kWh. Fúzní reaktor v budoucnu může produkovat energii slučováním jader deuteria na jádra hélia



Vypočítejte, kolik kilogramů deuteria je potřeba na pokrytí roční potřeby energie z roku 1970, jestliže pro klidové hmotnosti deuteria a hélia platí $m_{0\text{D}} = 2,01363$ amu, $m_{0\text{He}} = 4,00260$ amu, kde pro atomovou hmotnostní jednotku platí $1 \text{ amu} = 1,6605402 \times 10^{-27}$ kg.

■ **Příklad 10.13: Rozpad pionu**

Pion⁸ π^- nacházející se v klidu se rozpadl na mion μ^- a mionové antineutrino $\bar{\nu}_\mu$. Vypočítejte energii mionu a neutrina, jestliže pro klidové energie pionu a mionu platí $E_{\pi^0} = 139,6$ MeV, $E_{\mu^0} = 105,7$ MeV a klidovou hmotnost antineutrina můžeme zanedbat. Vypočítejte rychlost mionu.

Řešení: Jelikož pion byl před rozpadem v klidu, plyne ze zákona zachování energie

$$E_{\pi^0} = E_\mu + E_\nu.$$

Ze zákona zachování hybnosti pak vyplývá, že součet hybností mionu a antineutrina musí zůstat nulový, takže obě částice se pohybují opačnými směry a pro velikosti jejich hybností platí

$$p_\mu = p_\nu.$$

Jelikož pro celkovou energii platí

$$E^2 = E_0^2 + p^2 c^2$$

⁸Pion π^- (π -mezon) je částice skládající se z kvarku d a antikvarku \bar{u} . Z kvarků jsou složeny i nám důvěrně známé baryony jako proton (kvarky udu) a neutron (kvarky dud). Střední doba života pionu π^- je $\tau = 2,6 \times 10^{-8}$ s.

a klidovou energii antineutrína můžeme zanedbat, platí pro celkovou energii

$$E_{\pi 0} = \sqrt{E_{\mu 0}^2 + p_{\mu}^2 c^2} + p_{\nu} c = \sqrt{E_{\mu 0}^2 + p_{\mu}^2 c^2} + p_{\mu} c.$$

Odtud vyjádříme $p_{\mu} c$ jako

$$(E_{\pi 0} - p_{\mu} c)^2 = E_{\mu 0}^2 + p_{\mu}^2 c^2 \Rightarrow E_{\pi 0}^2 - E_{\mu 0}^2 = 2E_{\pi 0} p_{\mu} c \Rightarrow p_{\mu} c = \frac{E_{\pi 0}^2 - E_{\mu 0}^2}{2E_{\pi 0}}.$$

Pro celkovou energii mionu tedy bude platit

$$E_{\mu}^2 = E_{\mu 0}^2 + p_{\mu}^2 c^2 = E_{\mu 0}^2 + \frac{(E_{\pi 0}^2 - E_{\mu 0}^2)^2}{4E_{\pi 0}^2} = \frac{(E_{\pi 0}^2 + E_{\mu 0}^2)^2}{4E_{\pi 0}^2} \Rightarrow E_{\mu} = \frac{(E_{\pi 0}^2 + E_{\mu 0}^2)}{2E_{\pi 0}}.$$

Pro celkovou energii antineutrína můžeme psát

$$E_{\nu} = p_{\nu} c = p_{\mu} c = \frac{E_{\pi 0}^2 - E_{\mu 0}^2}{2E_{\pi 0}}.$$

Dosazením číselných hodnot dostaneme $E_{\mu} = 109,8 \text{ MeV}$, $E_{\nu} = 29,8 \text{ MeV}$. Pro rychlost mionu platí

$$v = \sqrt{1 - \frac{E_{\mu 0}^2}{E_{\mu}^2}} c = 0,27 c.$$

■ **Příklad 10.14: Srážka částic 1**

Dvě částice o stejných klidových hmotnostech m_0 se pohybují po přímce proti sobě tak, že pro velikost rychlosti každé z nich platí $v = 3c/5$. Jejich srážkou vznikne nová částice. Jaká je její klidová hmotnost M_0 ?

■ **Příklad 10.15: Srážka částic 2**

Částice o klidové hmotnosti m_0 , pohybující se rychlostí $v = 4c/5$, se srazí s částicí o stejné hmotnosti m_0 , která je v klidu tak, že vznikne nová částice. Jakou klidovou hmotnost M_0 má nově vzniklá částice? Jakou rychlostí u se pohybuje?

11. Mechanika kapalin

■ **Příklad 11.1: Ledovec ve sklenici vody**

Ve sklenici tvaru válce o poloměru $R = 2\text{ cm}$ plave ve vodě kostka ledu o objemu $V = 1\text{ cm}^3$. Vypočítejte, jaká část objemu ledu je nad hladinou a jaká pod hladinou. Určete dále, o kolik se zvedne hladina vody ve sklenici, jestliže led roztaje. Pro hustotu vody a ledu platí $\rho_v = 1\,000\text{ kg m}^{-3}$, $\rho_l = 920\text{ kg m}^{-3}$.

Řešení: Na kostku ledu působí tíhová síla

$$\mathbf{F}_g = m_l \mathbf{g} = \rho_l V \mathbf{g}$$

a vztlaková síla, pro kterou dle Archimedova zákona platí

$$\mathbf{F}_v = -m_v \mathbf{g} = -\rho_v V_p \mathbf{g},$$

kde V_p je objem ponořené části kostky. Má-li kostka ledu spočívat na hladině, musí být výslednice obou sil nulová, tedy

$$\mathbf{F}_g + \mathbf{F}_v = \mathbf{0} = (\rho_l V - \rho_v V_p) \mathbf{g} \quad \Rightarrow \quad \rho_l V - \rho_v V_p = 0.$$

Odtud pak pro objem ponořené části a objem části nad vodou V_n plyne

$$V_p = \frac{\rho_l}{\rho_v} V = 0,92 V, \quad V_n = V - V_p = \frac{\rho_v - \rho_l}{\rho_v} V = 0,08 V.$$

Protože hmotnost kostky ledu zůstane stejná i po jejím roztátí, musí pro objem takto vzniklé vody V' platit

$$m_l = \rho_l V = \rho_v V' \quad \Rightarrow \quad V' = \frac{\rho_l}{\rho_v} V.$$

Jelikož objem V' je stejný jako objem ponořené části V_p , hladina ve sklenici se nezvýší.

■ **Příklad 11.2: Plovoucí mosazná koule**

Jakou tloušťku stěny h musí mít mosazná koule o poloměru $R = 10\text{ cm}$, aby plavala na hladině vody? Pro hustotu mosazi a vody platí $\rho_m = 8\,500\text{ kg m}^{-3}$, $\rho_v = 1\,000\text{ kg m}^{-3}$.

■ **Příklad 11.3: Válec plovoucí v kapalině**

V kapalině hustoty ρ plave ve svislé poloze válec poloměru r výšky h tak, že je ze $4/5$ své výšky ponořen pod hladinou. Jakou práci musíme vykonat, abychom jej vytáhli nad hladinu?

■ **Příklad 11.4: Archimedes**

Bronzová⁹ krychle má tíhu $F_g = 6\,300\text{ N}$, pokud ji ponoříme do vody, tak její tíha je $F_{gv} = 5\,540\text{ N}$. Vypočítejte, kolik procent její hmotnosti je tvořeno mědí a kolik cínem,

⁹Bronz je slitina mědi a cínu.

víte-li, že pro hustotu vody, mědi a cínu platí $\rho_v = 1\,000\text{ kg m}^{-3}$, $\rho_m = 8\,800\text{ kg m}^{-3}$, $\rho_c = 7\,300\text{ kg m}^{-3}$. Vztlak vzduchu zanedbejte.

Řešení: Pro velikost tíhové síly platí

$$F_g = \rho V g,$$

kde ρ je hustota a V objem bronzové krychle. Pokud je krychle ponořena ve vodě, je její tíha zmenšena o vztlakovou sílu, takže platí

$$F_{gv} = F_g - \rho_v V g.$$

Odtud vypočteme objem a hustotu bronzové krychle jako

$$V = \frac{F_g - F_{gv}}{\rho_v g}, \quad \rho = \frac{F_g}{V g} = \frac{F_g}{F_g - F_{gv}} \rho_v = 8\,290\text{ kg m}^{-3}.$$

K hmotnosti krychle m částečně přispívá hmotnost mědi m_m a hmotnost cínu m_c , takže platí

$$m = m_m + m_c \quad \Rightarrow \quad \rho V = \rho_m V_m + \rho_c V_c. \quad (1)$$

Totéž platí pro objem

$$V = V_m + V_c.$$

Odtud můžeme vyjádřit například V_c , takže dosazením do vztahu (1) dostaneme

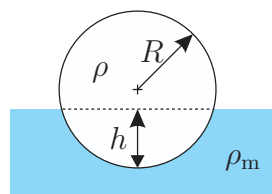
$$\rho V = \rho_m V_m + \rho_c (V - V_m) \quad \Rightarrow \quad V_m = \frac{\rho - \rho_c}{\rho_m - \rho_c} V.$$

Jelikož platí $V_m = m_m/\rho_m$ a $V = m/\rho$, dostaneme dosazením do posledního vzorce vztah pro hmotnostní podíl mědi ve tvaru

$$p_m = \frac{m_m}{m} = \frac{\rho - \rho_c}{\rho_m - \rho_c} \frac{\rho_m}{\rho} = 0,7.$$

Odtud tedy vyplývá, že hmotnost krychle je tvořena ze 70% mědi a z 30% cínem. Heuréka!

● **Příklad 11.5: Pokus u Mrtvého moře**

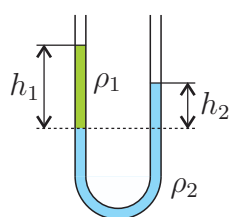


Malý izraelský chlapec hodil do Mrtvého moře o hustotě $\rho_m = 1\,240\text{ kg m}^{-3}$ kouli z kůry korkového dubu o hustotě $\rho = 200\text{ kg m}^{-3}$ a poloměru $R = 10\text{ cm}$. Vypočítejte, v jaké hloubce h pod hladinou se nachází nejnížší část plovoucí koule.

■ **Příklad 11.6: Vážení na rovnoramenných vahách**

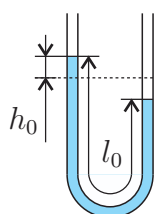
Předmět hustoty ρ byl vyvážen na rovnoramenných vahách závažím o hmotnosti m_z a hustotě ρ_z . Jaká je hmotnost předmětu m , pokud hustota vzduchu v okamžiku a místě měření byla ρ_v ?

Příklad 11.7: Dvě kapaliny v u-trubici



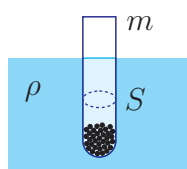
V u-trubici jsou nality dvě kapaliny, které se navzájem nemísí. Vypočítejte poměr jejich hustot z poměru výšek hladin h_1 a h_2 .

Příklad 11.8: Kmity kapaliny v u-trubici



Do svisle postavené u-trubice poloměru r je nalita ideální kapalina, délka jejíhož sloupce (viz obrázek) je l_0 a platí $l_0 \gg r$. Díky poklesu tlaku v levém rameni v něm vystoupí hladina kapaliny do výšky h_0 oproti rovnovážné hodnotě a poté se tlaky v obou ramenech opět vyrovnají. Jaká bude perioda kmitů kapaliny v u-trubici?

Příklad 11.9: Zkumavka



V ideální kapalině o hustotě ρ plave zkumavka hmotnosti m , která má průřez S . Jaká bude perioda kmitů zkumavky, pokud ji vertikálně vychýlíme z rovnovážné polohy a pustíme?

Řešení: Na plovoucí zkumavku působí jednak síla tíhová $\mathbf{F}_g = m\mathbf{g}$ a síla vztlaková $\mathbf{F}_v = -\rho V_0 \mathbf{g}$, kde V_0 je objem ponořené části zkumavky. Pokud je zkumavka v klidu, tyto dvě síly jsou v rovnováze a platí $\mathbf{F}_g + \mathbf{F}_v = \mathbf{0}$. Jestliže zkumavku vertikálně vychýlíme z rovnovážné polohy o výchylku y , bude pro výslednici sil platit

$$\mathbf{F} = -\rho S g y,$$

kde znaménko mínus reprezentuje skutečnost, že pokud zkumavku vychýlíme nahoru, převládne tíhová síla nad vztlakovou (výsledná síla pak míří dolů) a pokud zkumavku vychýlíme směrem dolů, převládne síla vztlaková nad tíhovou, kterážto míří nahoru.

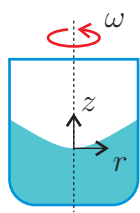
Pro pohybovou rovnici tedy platí

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -\rho S g y \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{\rho S g}{m} y = 0,$$

kde y je (jediná nenulová) vertikální složka vektoru výchylky. V pohybové rovnici poznáváme rovnici lineárního harmonického oscilátoru, takže ihned vidíme, že zkumavka bude po vychýlení vykonávat harmonické kmity s periodou

$$\omega_0^2 = \frac{\rho S g}{m} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\rho S g}}.$$

■ Příklad 11.10: Rotující nádoba



Nádoba naplněná kapalinou rotuje kolem své svislé osy úhlovou rychlostí ω . Vypočítejte, podle jaké funkce $z = z(r)$ se vytvaruje hladina kapaliny po dosažení ustáleného stavu.

Řešení: Na každý „element“ hladiny kapaliny o hmotnosti Δm působí dvě síly, odstředivá $\Delta \mathbf{F}_o$ a tíhová $\Delta \mathbf{F}_g$. Jejich výslednice má v rovině rz složky

$$\Delta \mathbf{F}_c = \Delta \mathbf{F}_o + \Delta \mathbf{F}_g = (\Delta m \omega^2 r, -\Delta m g) = \Delta m(\omega^2 r, -g),$$

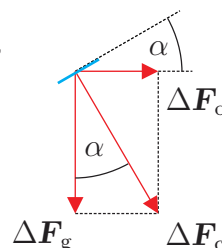
kde r je vzdálenost elementu hladiny kapaliny od osy rotace. Jelikož hladina kapaliny je díky tekutosti vždy kolmá na výslednici působících sil, svírá její tečna (v rovině rz) s horizontálou úhel, pro jehož tangens platí

$$\tan \alpha = \frac{dz}{dr} = \frac{\Delta F_o}{\Delta F_g} = \frac{\omega^2 r}{g}.$$

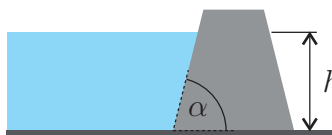
Odtud pak plyne

$$dz = \frac{\omega^2 r}{g} dr \quad \Rightarrow \quad z = \int_0^r \frac{\omega^2 x}{g} dx = \frac{\omega^2}{2g} r^2,$$

hladina má tedy tvar rotačního paraboloidu. Toho se využívá například v astronomii, kdy takto zakřivená hladina se používá jako primární zrcadlo dalekohledu, který ovšem může pozorovat pouze objekty v zenitu.



■ Příklad 11.11: Přehradní hráz



U přehradní hráze délky l tvaru lichoběžníkového hranolu s úhlem sklonu stěn α sahá voda do výšky h . Vypočítejte, jakou silou působí voda na přehradní hráz.

Řešení: Dosahuje-li voda do výšky h , tak ve vzdálenosti z ode dna je tlak vody

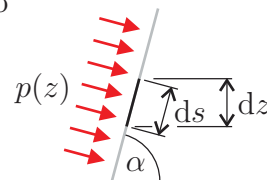
$$p(z) = \rho g(h - z),$$

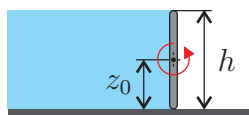
kde ρ je hustota vody. Na elementární plochu $dS = l ds$ působí kolmo síla o velikosti

$$dF = p(z) dS = \rho g l (h - z) ds = \frac{\rho g l}{\sin \alpha} (h - z) dz.$$

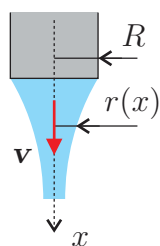
Celkovou sílu dostaneme integrací předchozího vztahu

$$F = \frac{\rho g l}{\sin \alpha} \int_0^h (h - z) dz = \frac{\rho g l}{\sin \alpha} \left[hz - \frac{z^2}{2} \right]_0^h = \frac{\rho g h^2 l}{2 \sin \alpha}.$$

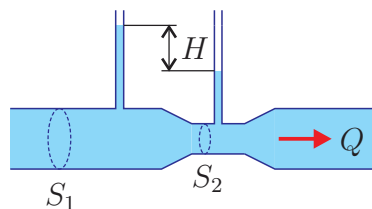


Příklad 11.12: Stavidlo

Stavidlo vodní nádrže je tvořeno deskou výšky h a šířky l , přičemž voda dosahuje až k jeho horní hraně. Vypočítejte, jakým momentem síly se snaží voda stavidlem pootočit, pokud je upevněno v ose ležící ve výšce $z_0 = h/2$. V jaké výšce by muselo být stavidlo upevněno, aby na něj voda působila nulovým momentem síly?

Příklad 11.13: Vodovod

Z vodovodu vytéká kruhovým otvorem o poloměru R voda počáteční rychlostí v_0 . Vypočítejte, jaká je závislost poloměru vodního proudu na vzdálenosti x od vodovodu. Vodu považujte za nestlačitelnou kapalinu se zanedbatelnou viskozitou.

Příklad 11.14: Venturiho trubice

Venturiho trubice, viz obrázek, je zařízení, pomocí něhož lze určit objemový průtok Q kapaliny z rozdílu výšek hladin H v trubicích připojených k úsekům potrubí s různými průřezy (S_1 a S_2). Najděte vzorec pro výpočet objemového průtoku $Q = Q(H)$. Kapalinu považujte za ideální.

Řešení: Podle Bernoulliho rovnice pro nestlačitelnou kapalinu můžeme psát

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2 + p_2,$$

kde indexem 1 označujeme veličiny v širším, a indexem 2 veličiny v užším úseku potrubí. Protože je potrubí vodorovné, potenciální energie kapaliny se nemění a $z_1 = z_2$. Kapalina je nestlačitelná, takže z rovnice kontinuity dostaneme

$$\rho v_1 S_1 = \rho v_2 S_2 \quad \Rightarrow \quad v_2 = v_1 \frac{S_1}{S_2},$$

Dosazením do Bernoulliho rovnice můžeme vyjádřit rychlost proudění v širším úseku potrubí

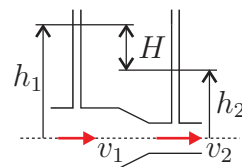
$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_1^2 \frac{S_1^2}{S_2^2} + p_2 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)S_2^2}{\rho(S_1^2 - S_2^2)}}.$$

Protože pro objemový průtok platí $Q = v_1 S_1 = v_2 S_2$, můžeme psát

$$Q = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)S_1^2 S_2^2}{\rho(S_1^2 - S_2^2)}}.$$

Tlaky p_1 a p_2 vytlačí kapalinu v pomocných trubicích do výšky h_1 a h_2 tak, že platí

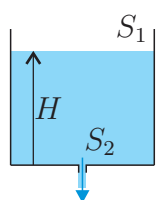
$$p_1 = \rho g h_1, \quad p_2 = \rho g h_2 \quad \Rightarrow \quad p_1 - p_2 = \rho g(h_1 - h_2) = \rho g H.$$



Vzorec pro výpočet objemového průtoku kapaliny tedy můžeme psát ve tvaru

$$Q = \sqrt{\frac{2gHS_1^2S_2^2}{S_1^2 - S_2^2}}.$$

■ Příklad 11.15: Za jak dlouho vyteče kapalina z nádoby?



Nádoba konstantního průřezu S_1 je naplněná ideální kapalinou do výšky H . Za jak dlouho vyteče kapalina malým otvorem o průřezu S_2 vyvrtaným ve dně nádoby? Přitom platí, že $S_1 \gg S_2$.

Řešení: Vyjdeme z Bernoulliho rovnice

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2 + p_2,$$

kde index 1 přísluší částici kapaliny na hladině a index 2 částici v místě výtoku kapaliny. V místě výtoku i na hladině je stejný (barometrický) tlak $p_1 = p_2$. Označíme-li dále výšku hladiny kapaliny nad výpustním otvorem $z = z_1 - z_2$, můžeme Bernoulliho rovnici přepsat do tvaru

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z = \frac{1}{2}\rho v_2^2.$$

Jelikož z rovnice kontinuity plyne $v_2 = v_1 S_1 / S_2$, můžeme dále psát

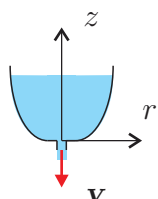
$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z = \frac{1}{2}\rho v_1^2 \frac{S_1^2}{S_2^2} \quad \Rightarrow \quad v_1 = -\frac{dz}{dt} = \sqrt{\frac{2gS_2^2 z}{S_1^2 - S_2^2}} \approx \frac{S_2}{S_1} \sqrt{2gz},$$

kde znaménko mínus vyjadřuje skutečnost, že v_1 je velikost rychlosti a hladina kapaliny klesá ($dz/dt < 0$). V posledním vzorci jsme ve jmenovateli zlomku zanedbali S_2^2 oproti S_1^2 . Provedeme separaci proměnných

$$-\frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{S_2}{S_1} \sqrt{2g} dt \quad \Rightarrow \quad -\int_H^0 \frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{S_2}{S_1} \sqrt{2g} \int_0^T dt \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{H} = \frac{S_2}{S_1} \sqrt{2g} T,$$

takže pro dobu výtoku kapaliny z nádoby můžeme psát

$$T = \frac{S_1}{S_2} \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Příklad 11.16: Vodní hodiny

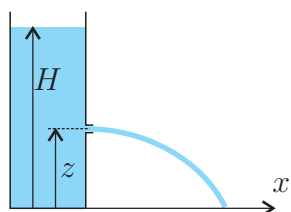
Vodní hodiny se používaly v Egyptě již před více než 3700 lety. Jedná se o osově symetrickou nádobu naplněnou vodou, která z ní vytéká malým otvorem ve dně. Nádoba musí mít takový tvar, aby hladina klesala rovnoměrně (konstantní rychlostí), z její výšky se odečítá čas. Najděte závislost poloměru této nádoby na výšce ode dna $r(z)$. Předpokládejte přitom, že plocha výpustního otvoru S je výrazně menší než plocha hladiny a vodu považujte za ideální kapalinu.

Příklad 11.17: Injekční stříkačka

Injekční stříkačka o vnitřním průměru $d_s = 10$ mm je zakončena jehlou o vnitřním průměru $d_j = 1$ mm. Jakou silou musíme působit na píst stříkačky, abychom kapalinu hustoty $\rho = 1200 \text{ kg m}^{-3}$ a objemu $\Delta V = 10$ ml vytlačili za čas $\Delta t = 1$ s? Kapalinu považujte za ideální.

Příklad 11.18: Výška hladiny

Do válcové nádoby poloměru $r = 5$ cm a výšky $H = 20$ cm stojící na podstavě přitéká z vodovodu voda s objemovým průtokem $Q = 140 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$. V jaké výšce h se ustálí hladina, pokud ve dně nádoby je otvor o ploše $S = 1 \text{ cm}^2$? Vodu považujte za ideální kapalinu.

Příklad 11.19: Z jaké výšky dostříkne kapalina nejdále?

Nádoba je naplněna ideální kapalinou až do výšky H . Do jaké výšky z ode dna nádoby musíme vyvrtat ve svislé stěně malý otvor, aby kapalina dostříkla nejdále? Jaká je tato maximální vzdálenost? Předpokládejte, že Otvor je tak malý, že jeho plochu můžeme oproti ploše hladiny zcela zanedbat.

Řešení: Z Bernoulliho rovnice plyne

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2 + p_2,$$

kde veličiny s indexem 1 se týkají částice na hladině a veličiny s indexem 2 částice v místě výtoku kapaliny. Na hladině a v místě výtoku je stejný (barometrický) tlak, takže $p_1 = p_2$. Označíme-li plochu hladiny S_1 a plochu výstupního otvoru S_2 , plyne z rovnice kontuity $v_1 = v_2 S_2 / S_1$. Protože podle předpokladu $S_2 \ll S_1$, můžeme velikost rychlosti v_1 zanedbat a Bernoulliho rovnici psát ve tvaru (Torricelliho vzorec)

$$\rho g H = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z \quad \Rightarrow \quad v_2 = \sqrt{2g(H - z)}.$$

Částice kapaliny se vně nádoby pohybují volným pádem – vzhledem k tomu, že rychlost v_2 má směr kolmý ke svislé stěně nádoby (Pascalův zákon), jedná se o vodorovný vrh z výšky z . Jelikož pro dobu letu platí $t_1 = \sqrt{2z/g}$, můžeme pro vzdálenost, kam až kapalina dopadne, psát

$$x = v_2 t_1 = 2\sqrt{z(H - z)}.$$

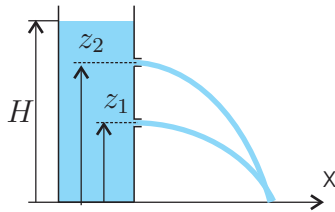
Najdeme extrém

$$\frac{dx}{dz} = \frac{H - 2z}{\sqrt{z(H - z)}} = 0 \quad \Rightarrow \quad z_{\max} = \frac{H}{2},$$

takže kapalina nejdále dolétne za předpokladu, že otvor bude umístěn v poloviční výšce hladiny kapaliny. Pro tuto maximální vzdálenost platí

$$x_{\max} = 2\sqrt{z_{\max}(H - z_{\max})} = H.$$

■ Příklad 11.20: Do stejné vzdálenosti



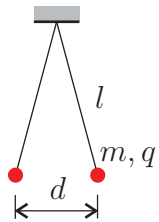
Do svislé stěny nádoby jsou vyvrtány dva malé otvory ve výškách z_1 a z_2 ode dna. V jaké výšce H musí být hladina ideální kapaliny, aby tato z obou otvorů dostříkla do stejné vzdálenosti? Jaká je tato vzdálenost?

12. Elektrostatické pole

■ Příklad 12.1: Kdo je silnější, Coulomb nebo Newton?

Vypočítejte poměr velikosti gravitační a elektrostatické síly, kterou na sebe působí dva elektrony.

■ Příklad 12.2: Nabité kuličky na provázku



Dvě malé stejně nabité kuličky o stejných hmotnostech $m = 0,5 \text{ g}$ jsou zavěšeny ve vzduchu v jednom bodě na nehmotných vláknech délky $l = 1 \text{ m}$. Jaký je jejich náboj q , jestliže pro jejich vzdálenost zapříčiněnou elektrostatickým odpuzováním platí $d = 5 \text{ cm}$?

Řešení: Na kuličky působí jednak tíhová síla (směrem dolů), pro jejíž velikost platí

$$F_g = mg$$

a elektrostatická odpudivá síla, pro jejíž velikost platí

$$F_C = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d^2}.$$

Vlákno kuličky se vychýlí pod takovým úhlem, aby výsledný moment obou sil vzhledem k místu uchycení vlákna byl nulový. To nastane tehdy, bude-li mít výslednice sil směr vychýlení vlákna, tedy bude-li platit

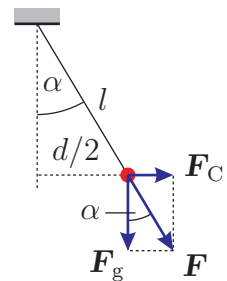
$$\tan \alpha = \frac{F_C}{F_g} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 mgd^2}.$$

Pro $\tan \alpha$ dále platí

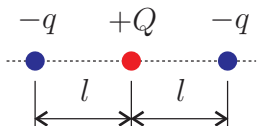
$$\tan \alpha = \frac{d/2}{\sqrt{l^2 - d^2/4}},$$

takže porovnáním obou vzorců dostaneme

$$\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 mgd^2} = \frac{d/2}{\sqrt{l^2 - d^2/4}} \Rightarrow q = \sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0 mgd^3}{\sqrt{4l^2 - d^2}}} = 5,84 \times 10^{-9} \text{ C}.$$



■ Příklad 12.3: Tři náboje



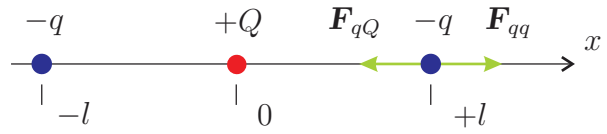
V jakém poměru musí být velikosti bodových nábojů q a Q opačného znaménka, volně umístěných symetricky v jedné přímce, aby tato konfigurace byla v rovnováze? Je tato rovnováha stabilní, nebo labilní?

Nápověda: Stabilitu vyšetříte tak, že posunete jeden z nábojů z rovnovážné polohy doleva nebo doprava o malou vzdálenost Δx a zjistíte, zda má výsledná síla tendenci tuto vzdálenost zvětšovat (labilní rovnováha), nebo zmenšovat (stabilní rovnováha).

Řešení: Vzhledem k symetrii úlohy stačí vyšetřovat např. jen síly působící na pravý náboj. Síla působící mezi náboji $-q$ a $-q$ je odpuzivá, síla působící mezi náboji $+Q$ a $-q$ je přitažlivá. Pravý (a díky symetrii i levý a prostřední) náboj bude v rovnováze, jestliže výslednice sil na něj působících bude nulová.

Pro tuto výslednici platí

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \mathbf{F}_{qQ} + \mathbf{F}_{qq} = \\ &= -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 l^2} \mathbf{i} + \frac{qq}{4\pi\epsilon_0 (2l)^2} \mathbf{i} = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 l^2} \left(\frac{q}{4} - Q \right) \mathbf{i},\end{aligned}$$



kde \mathbf{i} je jednotkový vektor ve směru osy x . Ze vzorce je patrné, že aby byly náboje v rovnováze, musí platit $q = 4Q$.

Stabilitu konfigurace vyšetříme tak, že posuneme pravý náboj o vzdálenost Δx , kde $|\Delta x/l| \ll 1$ směrem doprava a zjistíme, jaký směr má výslednice sil. Pro x -ovou složku této síly bude platit

$$\begin{aligned}F &= \frac{qq}{4\pi\epsilon_0 (2l + \Delta x)^2} - \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 (l + \Delta x)^2} = \frac{16Q^2}{4\pi\epsilon_0 (2l + \Delta x)^2} - \frac{4Q^2}{4\pi\epsilon_0 (l + \Delta x)^2} = \\ &= \frac{Q^2}{\pi\epsilon_0} \left[\frac{4}{(2l + \Delta x)^2} - \frac{1}{(l + \Delta x)^2} \right] = \frac{Q^2}{\pi\epsilon_0 l^2} \left[\frac{1}{(1 + \Delta x/2l)^2} - \frac{1}{(1 + \Delta x/l)^2} \right].\end{aligned}$$

S využitím Taylorova rozvoje

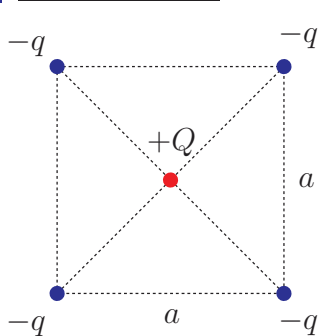
$$\frac{1}{(1+y)^2} \approx 1 - 2y$$

můžeme vzorec pro výslednici sil dále zjednodušit

$$F \approx \frac{Q^2}{\pi\epsilon_0 l^2} \left[\left(1 - 2\frac{\Delta x}{2l} \right) - \left(1 - 2\frac{\Delta x}{l} \right) \right] = \frac{Q^2}{\pi\epsilon_0 l^3} \Delta x.$$

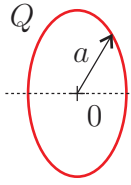
Odtud vyplývá, že konfigurace je v labilní rovnováze, neboť působící síla má směr výchylky, kterou tím zvětšuje.

■ Příklad 12.4: Pět nábojů



Čtyři bodové náboje o velikosti q jsou volně umístěny ve vrcholech čtverce o straně a . Jakou velikost Q musí mít náboj opačného znaménka umístěný ve středu čtverce, aby celá konfigurace byla v rovnováze?

Příklad 12.5: Potenciál a intenzita elektrického pole v ose kruhové smyčky



Vypočítejte potenciál a intenzitu elektrického pole v ose kruhové smyčky o poloměru a . V jaké vzdálenosti je na ose smyčky velikost intenzity elektrického pole maximální? Smyčka je rovnoměrně nabitá nábojem Q a je umístěna ve vzduchu.

Řešení: Pro lineární hustotu náboje τ platí $\tau = Q/l = Q/2\pi a$. Pro potenciál generovaný bodovým nábojem dQ můžeme z Coulombova zákona psát

$$d\varphi = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r},$$

kde r je vzdálenost náboje a místa, v němž potenciál určujeme. Jelikož v tomto případě je náboj rovnoměrně rozmístěn na smyčce, můžeme ji rozdělit na elementární úseky délky dl , přičemž každý z nich nese náboj $dQ = \tau dl$, takže celkový potenciál dostaneme „sečtením“ všech příspěvků jako

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\tau dl}{r}.$$

Položíme-li smyčku do počátku roviny xy , můžeme ji popsat parametrickými rovnicemi

$$x = a \cos \alpha, \quad y = a \sin \alpha.$$

Pro diferenciály souřadnic a délky odtud dostaneme

$$dx = -a \sin \alpha d\alpha, \quad dy = a \cos \alpha d\alpha \quad \Rightarrow \quad dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = a d\alpha.$$

Jelikož pro vzdálenost elementu smyčky a místa v němž určujeme potenciál platí

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{a^2 + z^2},$$

můžeme pro potenciál v ose smyčky psát

$$\varphi = \frac{Q}{8\pi^2\epsilon_0\sqrt{a^2+z^2}} \int_0^{2\pi} d\alpha = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{a^2+z^2}}.$$

Intenzitu elektrického pole vypočteme z vzorce $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$. Vzhledem k symetrii bude v ose smyčky nenulová pouze z -ová složka intenzity a bude pro ni platit

$$E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(a^2+z^2)^{3/2}}.$$

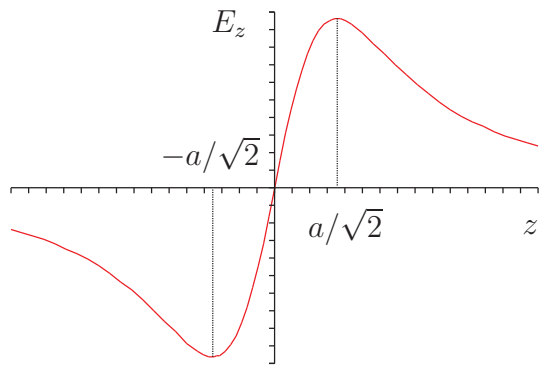
Maxima velikosti intenzity dostaneme z podmínky pro extrém

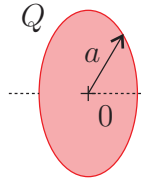
$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{(a^2+z^2)^{3/2} - 3z^2(a^2+z^2)^{1/2}}{(a^2+z^2)^3} = \frac{(a^2+z^2) - 3z^2}{(a^2+z^2)^{5/2}} = 0,$$

odkud pak vyplývá

$$z = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Jelikož v každém z podintervalů $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$ je pouze jeden stacionární bod a dále $E_z(0) = 0$ a totéž platí pro limity v $\pm\infty$, musí se jednat o extrémy.



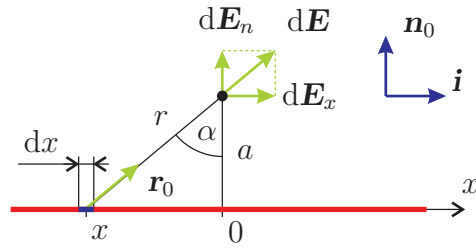
**Příklad 12.6: Potenciál a intenzita elektrického pole v ose kruhové desky**

Vypočítejte potenciál a intenzitu elektrického pole v ose tenké kruhové desky o poloměru a , jestliže plošná hustota náboje desky σ je konstantní. Jak závisí intenzita elektrického pole na vzdálenosti od desky pro $z \ll a$?

**Příklad 12.7: Potenciál a intenzita elektrického pole v okolí nabitě niti**

Vypočítejte potenciál a intenzitu elektrického pole ve vzdálenosti a od nekonečně dlouhé niti rovnoměrně nabitě nábojem o lineární hustotě τ . Permittivita prostředí $\varepsilon = \varepsilon_0$.

Řešení:



Nabitou nit položíme na osu x . Element niti délky dx nese náboj $dQ = \tau dx$ a ve vzdálenosti r vytváří podle Coulombova zákona intenzitu elektrického pole

$$d\mathbf{E} = \frac{\tau dx}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \mathbf{r}_0.$$

Tento vektor můžeme rozložit na tečnou složku E_x a na složku normálovou E_n , pro které platí

$$dE_x = dE \sin \alpha = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \frac{x dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}}, \quad dE_n = dE \cos \alpha = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \frac{a dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Pro celkovou tečnou složku vektoru intenzity elektrického pole dostaneme integrací

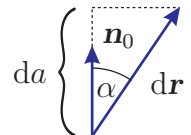
$$E_x = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = 0,$$

neboť funkce integrovaná v symetrických mezích je lichá. Pro celkovou normálovou složku intenzity pole můžeme psát

$$\begin{aligned} E_n &= \frac{a\tau}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = \left| \begin{array}{l} x = a \tan \zeta, \quad d\zeta = a / \cos^2 \zeta \, d\zeta \\ -\infty \rightarrow -\pi/2, \quad \infty \rightarrow \pi/2 \end{array} \right| = \\ &= \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 a} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \zeta \, d\zeta = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 a} \left[\sin \zeta \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 a}, \end{aligned}$$

kde jsme použili známý vzorec $1 + \tan^2 \zeta = 1 / \cos^2 \zeta$. Velikost intenzity klesá s první mocninou vzdálenosti od nabitě niti a ve vektorovém tvaru můžeme psát

$$\mathbf{E} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 a} \mathbf{n}_0.$$



Pro potenciál můžeme psát

$$\varphi = - \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \int \frac{1}{a} \mathbf{n}_0 \cdot d\mathbf{r} = - \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \int \frac{da}{a} = - \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \ln a + K,$$

kde K je integrační konstanta (potenciál je definovaný až na konstantu).

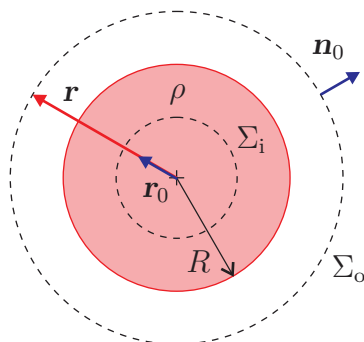
■ Příklad 12.8: Dvě nabité niti

Vypočítejte, jakou silou na sebe působí dvě velmi dlouhé rovnoběžné niti nabité s lineárními hustotami náboje τ_1 a τ_2 , jejichž vzájemná vzdálenost je h .

■ Příklad 12.9: Nevodivá nabitá koule

Vypočítejte intenzitu a potenciál elektrického pole uvnitř a vně nevodivé nabité koule o poloměru R , která je rovnoměrně nabitá nábojem Q (objemová hustota náboje ρ je konstantní). Pro permitivitu koule i jejího okolí platí $\varepsilon = \varepsilon_0$.

Řešení:



Vzhledem k centrální symetrii úlohy se můžeme za použití Gaussova zákona vyhnout výpočtu trojného integrálu. Podle Gaussova zákona je tok vektoru intenzity elektrického pole plochou Σ roven celkovému náboji uvnitř této plochy dělenému elektrickou konstantou

$$\oiint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}. \quad (1)$$

Vzhledem k centrální symetrii zkoumané konfigurace musí platit

$$\mathbf{E} = E(r)\mathbf{r}_0,$$

kde \mathbf{r}_0 je radiální jednotkový vektor. Intenzitu elektrického pole vypočteme tak, že integrační plochou zvolíme kulovou plochu o poloměru r se středem ve středu nabité koule. Pro orientovaný element plochy pak můžeme psát $d\mathbf{S} = \mathbf{n}_0 dS$ a pro tok vektoru intenzity elektrického pole bude platit

$$\oiint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oiint_{\Sigma} E(r)\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{n}_0 dS = \oiint_{\Sigma} E(r) dS = E(r) \oiint_{\Sigma} dS = E(r)\Sigma = 4\pi r^2 E(r),$$

neboť v daném bodě jsou jednotkové vektory \mathbf{r}_0 a \mathbf{n}_0 kolineární a platí $\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{n}_0 = 1$ a velikost intenzity elektrického pole je na integrační ploše (díky symetrii) konstantní.

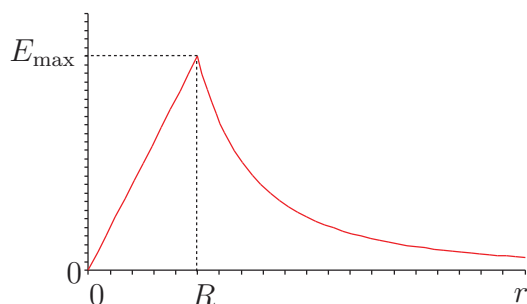
Pro $r \geq R$ (integrační plocha je vně nabité koule) je celý náboj uzavřen uvnitř integrační plochy Σ_o a z Gaussova zákona dostaneme

$$4\pi r^2 E_o = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_o = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow \mathbf{E}_o = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \mathbf{r}_0,$$

Vzorec pro vektor intenzity elektrického pole má tedy stejný tvar, jako v případě bodového náboje.

Pro $r < R$ (integrační plocha je uvnitř nabité koule) je v integrační ploše Σ_i uzavřena jen část celkového náboje. Pro tento náboj Q' platí

$$Q' = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho = \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = Q \frac{r^3}{R^3}.$$



Dosazením do Gaussova zákona dostaneme

$$4\pi r^2 E_i = \frac{Q'}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \frac{r^3}{R^3} \Rightarrow$$

$$E_i = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} r \Rightarrow \mathbf{E}_i = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \mathbf{r},$$

velikost intenzity elektrického pole od středu koule tedy lineárně narůstá.

Potenciál vypočteme z definice

$$\varphi = - \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}.$$

Vně nabitá koule bude platit

$$\varphi_o = - \int \mathbf{E}_o \cdot d\mathbf{r} = - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\mathbf{r}_0}{r^2} \cdot d\mathbf{r} = - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + C_1,$$

kde C_1 je integrační konstanta.

Uvnitř nabitá koule bude platit

$$\varphi_i = - \int \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{r} = - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \int \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \int r dr = - \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^3} r^2 + C_2.$$

Jelikož potenciál je z definice spojitá funkce, je třeba obě řešení „sešít“ vhodnou volbou integračních konstant C_1 a C_2 , například takto: Pokud položíme $C_1 = 0$, bude potenciál v nekonečnu nulový a bude platit

$$\varphi_o(R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

Aby byl potenciál pro $r = R$ spojitou funkcí, musí dále platit

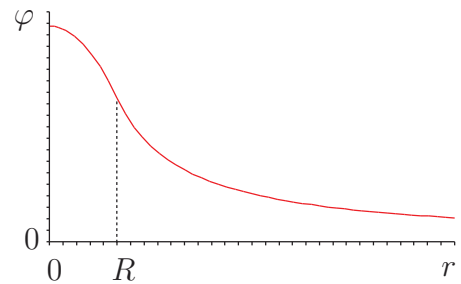
$$\lim_{r \rightarrow R^-} \varphi_i(R) = \varphi_o(R).$$

Odtud dostaneme

$$- \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^3} R^2 + C_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \Rightarrow C_2 = \frac{3Q}{8\pi\varepsilon_0 R}.$$

Pro potenciál tak můžeme psát

$$\varphi = \begin{cases} - \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^3} r^2 + \frac{3Q}{8\pi\varepsilon_0 R}, & \text{pro } r < R, \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}, & \text{pro } r \geq R. \end{cases}$$

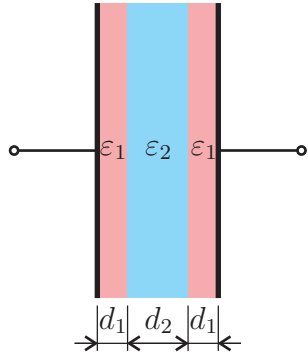


■ Příklad 12.10: Vodivá nabitá koule

Vypočítejte intenzitu a potenciál elektrického pole uvnitř a vně vodivé koule o poloměru R , která je nabita nábojem Q . Pro permitivitu koule i jejího okolí platí $\varepsilon = \varepsilon_0$.

Příklad 12.11: Kapky

Vodní kapka vznikla spojením $N = 6$ stejných kapiček, z nichž každá měla (oproti nekonečnu) potenciál $\varphi_1 = 1 \text{ kV}$. Jaký má potenciál φ_N (oproti nekonečnu) nově vzniklá kapka?

Příklad 12.12: Deskový kondenzátor 1

Plocha polepů deskového kondenzátoru $S = 200 \text{ cm}^2$. Mezi polepy je sklo tloušťky $d_2 = 1 \text{ mm}$ s permitivitou $\varepsilon_2 = 7\varepsilon_0$. Každá ze stěn skleněné výplně je opatřena parafinovou vrstvou o tloušťce $d_1 = 0,2 \text{ mm}$ s permitivitou $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_0$. Jaká je kapacita tohoto kondenzátoru?

Řešení: Nejdříve určíme elektrickou indukci v blízkosti desky nabité plošnou hustotou náboje $\sigma = Q/S$. Nejjednodušší je použít Gaussův zákon pro elektrickou indukci \mathbf{D} ve tvaru

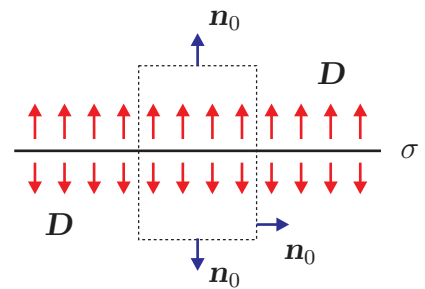
$$\oiint_{\Sigma} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q.$$

Jako integrační plochu Σ zvolíme např. válec, jehož podstavy jsou rovnoběžné s nabitou plochou.

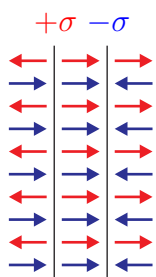
Plošný integrál potom můžeme přepsat do tvaru

$$\oiint_{\Sigma} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\Sigma_{\text{plášť}}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{\Sigma_{\text{podstavy}}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}.$$

Z důvodu symetrie musí vektor \mathbf{D} mířit kolmo k nabitě ploše (jiný směr nelze nijak logicky odůvodnit), tento vektor rovněž musí na opačných stranách desky mít opačný směr. Proto bude plošný integrál přes plášť nulový ($\mathbf{D} \perp \mathbf{n}_0$). Vzhledem ke kolineárnosti \mathbf{D} a \mathbf{n}_0 na podstavách bude platit



$$\oiint_{\Sigma} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\Sigma_{\text{podstavy}}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\Sigma_{\text{podstavy}}} D \, dS = D \iint_{\Sigma_{\text{podstavy}}} dS = 2DS,$$



kde S je plocha podstavy a dvojka vyjadřuje skutečnost, že podstavy jsou dvě. Protože pro náboj uzavřený uvnitř integrační plochy platí $Q = \sigma S$, můžeme pro elektrickou indukci psát

$$2DS = \sigma S \quad \Rightarrow \quad D = \frac{\sigma}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D} = \frac{\sigma}{2} \mathbf{n}_0,$$

kde \mathbf{n}_0 reprezentuje normálový vektor k nabitě desce.

Jsou-li jako v případě deskového kondenzátoru rovnoběžné desky dvě a nabitě opačnými náboji, příspěvky vně kondenzátoru se odečítají, uvnitř sčítají, takže pro velikost elektrické indukce uvnitř kondenzátoru bude platit $D = \sigma$.

Pro napětí mezi body **A** a **B** platí

$$U = \int_{\mathbf{A}, \mathcal{L}}^{\mathbf{B}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}.$$

Integrál budeme počítat po úsečce (trajektorie \mathcal{L}) ve směru vektoru intenzity elektrického pole (tedy od kladně nabitě desky k desce záporně nabitě). Bude platit

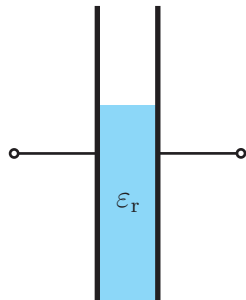
$$\begin{aligned} U = U_1 + U_2 + U_3 &= \int_0^{d_1} \frac{\sigma}{\varepsilon_1} dx + \int_{d_1}^{d_1+d_2} \frac{\sigma}{\varepsilon_2} dx + \int_{d_1+d_2}^{d_1+d_2+d_1} \frac{\sigma}{\varepsilon_1} dx = \\ &= \sigma \left(\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2} + \frac{d_1}{\varepsilon_1} \right) = \sigma \left(\frac{d_2}{\varepsilon_2} + 2\frac{d_1}{\varepsilon_1} \right). \end{aligned}$$

Kapacitu kondenzátoru potom dostaneme jako

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\sigma S}{\sigma \left(\frac{d_2}{\varepsilon_2} + 2\frac{d_1}{\varepsilon_1} \right)} = \frac{1}{\frac{d_2}{\varepsilon_2 S} + 2\frac{d_1}{\varepsilon_1 S}} = \frac{1}{1/C_2 + 2/C_1},$$

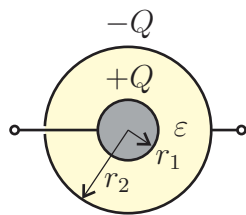
kde $C_1 = \varepsilon_1 S/d_1$ a $C_2 = \varepsilon_2 S/d_2$. Jedná se vlastně o sériovou kombinaci kondenzátorů s kapacitami C_1 , C_2 a C_1 . Po dosazení číselných hodnot dostaneme $C = 516 \text{ pF}$.

■ Příklad 12.13: Deskový kondenzátor 2



Deskový kondenzátor má elektrody plochy S , jejichž vzájemná vzdálenost je d . Část plochy S_d mezi elektrodami je vyplněna dielektrikem s relativní permitivitou ε_r . Jaká je kapacita tohoto kondenzátoru?

■ Příklad 12.14: Kulový kondenzátor



Kulový kondenzátor je tvořen dvěma elektrodami tvaru soustředných kulových ploch o poloměrech r_1 a r_2 , mezi nimiž je výplň z materiálu s permitivitou ε . Vypočítejte kapacitu tohoto kondenzátoru.

Řešení: Nechť je vnitřní kulová plocha nabitá kladným nábojem $+Q$ a vnější kulová plocha nábojem $-Q$. Podle Gaussova zákona je intenzita elektrického pole uvnitř vnitřní a vně vnější kulové plochy nulová, neboť v obou případech je celkový náboj uzavřený v myšlené integrační kulové ploše s $r < r_1$ a $r > r_2$ nulový ($Q - Q = 0$).

Pro $r_1 < r < r_2$ platí (viz příklad 12.9)

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2} \mathbf{r}_0,$$

kde \mathbf{r}_0 je jednotkový vektor mířící radiálním směrem. Vypočteme napětí mezi elektrodami

$$U = \int_{\mathbf{A}, \mathcal{L}}^{\mathbf{B}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \int_{\mathbf{A}, \mathcal{L}}^{\mathbf{B}} \frac{\mathbf{r}_0}{r^2} \cdot d\mathbf{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right),$$

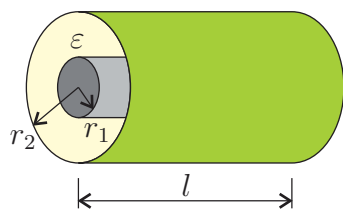
kde \mathbf{A} je nějaký bod na vnitřní a \mathbf{B} nějaký bod na vnější elektrodě. Kapacitu kondenzátoru pak vypočteme jako

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{4\pi\epsilon}{1/r_1 - 1/r_2} = \frac{4\pi\epsilon r_1 r_2}{r_2 - r_1}.$$

■ Příklad 12.15: Kapacita Zeměkoule

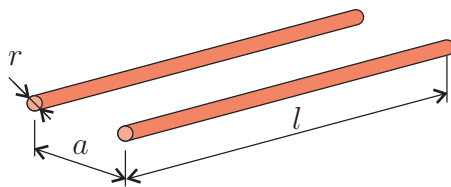
Jakou kapacitu má Zeměkoule, jestliže ji můžeme pokládat za vodivou kouli o poloměru $R_Z = 6\,378\text{ km}$?

■ Příklad 12.16: Válcový kondenzátor



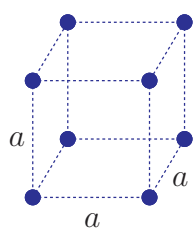
Válcový kondenzátor je tvořen dvěma souosými elektrodami tvaru pláště válce o poloměrech r_1 , r_2 a délce l . Prostor mezi elektrodami je vyplněn materiálem o permitivitě ϵ . Vypočítejte kapacitu tohoto kondenzátoru.

■ Příklad 12.17: Kapacita dvojlinky



Vypočítejte kapacitu dvou rovnoběžných vodičů poloměru r a délky l , pro vzdálenost jejichž os platí $a \gg r$ a $l \gg a$.

■ Příklad 12.18: Krychle



Jak velkou práci je třeba vynaložit na umístění 8 stejných nábojů q do rohů myšlené krychle o hraně a ? Předpokládejte, že náboje je třeba přemístit z velké vzdálenosti a prostředí má permitivitu ϵ_0 .

Řešení: Pro polohové vektory jednotlivých nábojů můžeme psát

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= (0, 0, 0), & \mathbf{r}_2 &= (a, 0, 0), & \mathbf{r}_3 &= (a, a, 0), & \mathbf{r}_4 &= (0, a, 0), \\ \mathbf{r}_5 &= (0, 0, a), & \mathbf{r}_6 &= (a, 0, a), & \mathbf{r}_7 &= (a, a, a), & \mathbf{r}_8 &= (0, a, a). \end{aligned}$$

V elektrostatickém poli působí na náboj q síla $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$, takže máme-li přemístit náboj z místa \mathbf{r}_a do místa \mathbf{r}_b po trajektorii \mathcal{L} , musíme tuto sílu překonat a vykonáme přitom práci

$$A = \int_{\mathbf{r}_a, \mathcal{L}}^{\mathbf{r}_b} -q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -q \int_{\mathbf{r}_a, \mathcal{L}}^{\mathbf{r}_b} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = q[\varphi(\mathbf{r}_b) - \varphi(\mathbf{r}_a)].$$

V našem případě je \mathbf{r}_b bod, ve kterém má být náboj umístěn a \mathbf{r}_a leží nekonečně daleko od tohoto místa a položíme $\varphi(\mathbf{r}_a) = 0$.

Práce potřebná pro umístění prvního náboje do polohy \mathbf{r}_1 je nulová, neboť zde nejsou jiné náboje, které by na něj působily nějakou silou, takže $A_1 = 0$. Tento první náboj ve svém okolí vytváří potenciál

$$\varphi_1(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}.$$

Na umístění druhého náboje do místa \mathbf{r}_2 vykonáme práci

$$A_2 = q\varphi_1(\mathbf{r}_2) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a}.$$

Tyto dva náboje ve svém okolí vytváří potenciál

$$\varphi_2(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} + \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|} \right).$$

Na umístění třetího náboje do místa \mathbf{r}_3 vykonáme práci

$$A_3 = q\varphi_2(\mathbf{r}_3) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|} + \frac{1}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2|} \right) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Obecně tedy platí

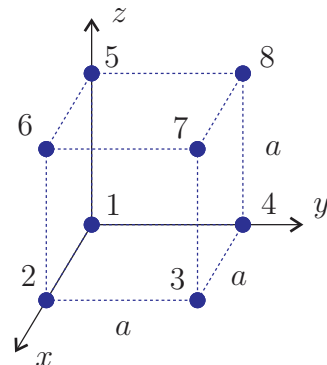
$$\varphi_i(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^i \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|}, \quad A_i = q\varphi_{i-1}(\mathbf{r}_i) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^{i-1} \frac{1}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|}.$$

Dosazením do posledního vzorce tak postupně dostaneme

$$\begin{aligned} A_4 &= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a} \left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right), & A_5 &= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right), & A_6 &= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a} \left(2 + \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \\ A_7 &= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a} \left(2 + \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right), & A_8 &= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a} \left(3 + \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right). \end{aligned}$$

Celkovou práci dostaneme jako součet prací vykonaných při přemístění jednotlivých nábojů

$$A = \sum_{i=1}^8 A_i = \frac{q^2}{\pi\epsilon_0 a} \left(3 + \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$



■ Příklad 12.19: Poloměr elektronu

Víme, že pro hmotnost elektronu platí $m_e = 9,11 \times 10^{-31}$ kg a pro jeho náboj $q_e = -1,602 \times 10^{-19}$ C. Předpokládejte, že elektron je kulička s veškerým nábojem rovnoměrně rozmístěným na jejím povrchu s nulovou „mechanickou“ hmotností. Jaký poloměr by tato kulička musela mít, aby energie pole vytvářeného elektronem měla hmotnost rovnou hmotnosti m_e ?

Příklad 12.20: Deskový kondenzátor s a bez dielektrické výplně

Deskový kondenzátor má elektrody s plochou $S = 100 \text{ cm}^2$ vzdálené $d = 1 \text{ mm}$, mezi nimiž je umístěna dielektrická výplň s relativní permitivitou $\varepsilon_r = 5$. Mezi elektrodami kondenzátoru, který není zapojen do žádného obvodu, je napětí $U_0 = 1000 \text{ V}$. Jak se změní toto napětí, když dielektrikum vytáhneme z kondenzátoru ven? Jakou práci musíme na vytažení dielektrika vynaložit?

Řešení: Pro kapacitu deskového kondenzátoru (viz příklad 12.12) platí

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon S}{d}.$$

Jelikož se manipulací s dielektrikem volný náboj na elektrodách kondenzátoru nijak nezmění, pro napětí U po vyjmutí dielektrika musí platit

$$Q = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 S}{d} U_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d} U \quad \Rightarrow \quad U = \varepsilon_r U_0 = 5000 \text{ V}.$$

Práci vynaloženou na vytažení dielektrika vypočteme z rozdílu energií kondenzátoru bez a s dielektrikem jako $A = \mathcal{E}_{\text{bez}} - \mathcal{E}_s$. Pro energii elektrostatického pole v deskovém kondenzátoru můžeme psát

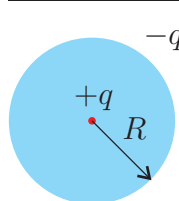
$$\mathcal{E} = \frac{\varepsilon}{2} \iiint_V E^2 dV = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon} \iiint_V dV = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon} Sd = \frac{1}{2} (\sigma S)^2 \frac{d}{\varepsilon S} = \frac{Q^2}{2C}.$$

Pro vynaloženou práci tedy bude platit

$$\begin{aligned} A = \mathcal{E}_{\text{bez}} - \mathcal{E}_s &= \frac{Q^2}{2} \left(\frac{1}{C_{\text{bez}}} - \frac{1}{C_s} \right) = \frac{Q^2}{2C_s} (\varepsilon_r - 1) = \\ &= \frac{U_0^2 C_s}{2} (\varepsilon_r - 1) = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S U_0^2}{2d} (\varepsilon_r - 1) = 8,85 \times 10^{-4} \text{ J}. \end{aligned}$$

Příklad 12.21: Síla, jíž se přitahují desky deskového kondenzátoru

Deskový kondenzátor má elektrody s plochou $S = 100 \text{ cm}^2$, mezi nimiž je vzduchová vrstva tloušťky $d = 1 \text{ mm}$. Jak velkou silou se desky přitahují, jestliže je kondenzátor nabit na rozdíl potenciálů $U = 1000 \text{ V}$?

Příklad 12.22: Dipólový moment atomu v elektrostatickém poli

Předpokládejme jednoduchý model atomu, kde kladný bodový náboj $+q$ je obklopen záporným nábojem $-q$ spojitě rovnoměrně rozloženým v kouli o poloměru R . Vypočítejte dipólový moment takového „atomu“, jestliže se ocitne v homogenním elektrostatickém poli s intenzitou \mathbf{E}_0 .

Řešení: Díky vnějšímu elektrickému poli \mathbf{E}_0 působí na kladný náboj (jádro atomu) síla ve směru pole a na záporný náboj (atomový obal) síla ve směru opačném.

Jádro atomu se proto vůči obalu posune takovým způsobem, aby výslednice sil na něj působících byla nulová.

Z příkladu 12.9 víme, že v bodě s polohovým vektorem \mathbf{d} vzhledem ke středu rovnoměrně nabitě koule s celkovým nábojem $-q$ působí intenzita elektrického pole

$$\mathbf{E}_i = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \mathbf{d},$$

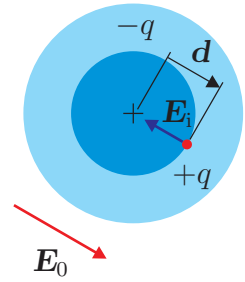
takže z podmínky rovnováhy dostaneme

$$\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_i = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{d} = \frac{4\pi\epsilon_0 R^3 \mathbf{E}_0}{q},$$

takže pro dipólový moment atomu platí

$$\mathbf{p} = q\mathbf{d} = 4\pi\epsilon_0 R^3 \mathbf{E}_0,$$

dipólový moment má tedy směr intenzity elektrického pole a velikost momentu je přímo úměrná velikosti intenzity elektrického pole.



■ Příklad 12.23: Vakuová dioda

Vakuová dioda (elektronka) má elektrody tvaru souosých válců, přičemž vnitřní (katoda) má poloměr $a = 0,5 \text{ mm}$ a vnější (anoda) má poloměr $b = 4,5 \text{ mm}$. Mezi elektrodami je potenciálový rozdíl $U = 300 \text{ V}$. Z katody je emitován elektron, jehož počáteční rychlost může být považována za nulovou. Jakou rychlost má elektron v polovině dráhy k anodě a při dopadu na ni? Pro hmotnost elektronu platí $m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$.

13. Stacionární elektrický proud

■ Příklad 13.1: Rychlost elektronů ve vodiči

Měděným drátem o průřezu $S = 10 \text{ mm}^2$ protéká proud $I = 1 \text{ A}$. Jaká je střední uspořádaná rychlost elektronů, jestliže pro koncentraci volných elektronů v mědi platí $n = 8,5 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$? Pro náboj elektronu platí $q_e = -1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$.

Řešení: V úseku drátu délky dx , tedy v objemu $dV = Sdx$ se nachází pohyblivé elektrony s celkovým nábojem

$$dQ = nq_e S dx.$$

Průtokem elektrického proudu dochází k přemísťování tohoto náboje, přičemž platí

$$I = \frac{dQ}{dt} = nq_e S \frac{dx}{dt} = nq_e \bar{v} S,$$

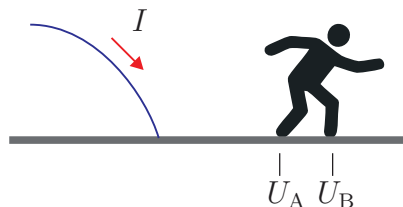
kde \bar{v} je střední uspořádaná rychlost elektronů v důsledku průchodu proudu. Vypočteme ji jako

$$\bar{v} = \frac{I}{nq_e S} = 7,34 \mu\text{m s}^{-1}.$$

■ Příklad 13.2: Hybnost elektrického proudu

Kabelem o délce $l = 100 \text{ km}$ protéká proud $I = 400 \text{ A}$. Jakou hybnost mají elektrony v tomto kabelu? Pro náboj elektronu platí $q_e = -1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$, pro jeho hmotnost $m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$.

■ Příklad 13.3: Krokové napětí

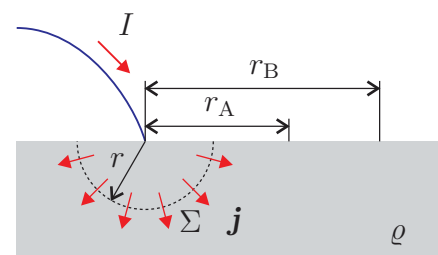


Na zem spadlým drátem protéká do země s konstantní rezistivitou ϱ elektrický proud I . Vypočítejte krokové napětí $\Delta U = U_B - U_A$ mezi nohama odvážlivce, který stojí jednou nohou ve vzdálenosti r_A od drátu a druhou nohou ve vzdálenosti r_B .

Řešení:

S ohledem na homogenitu a izotropii se dá předpokládat, že pro proudovou hustotu v zemi bude platit $\mathbf{j} = j(r)\mathbf{r}_0$, kde \mathbf{r}_0 je jednotkový vektor mířící radiálně od místa kontaktu drátu a země. Ze vztahu mezi proudem a proudovou hustotou plyne

$$I = \iint_{\Sigma} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\Sigma} j(r)\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}_0 dS = j \iint_{\Sigma} dS = 2\pi r^2 j,$$



kde za integrační plochu jsme zvolili povrch polokoule o poloměru r se středem v místě kontaktu drátu a země. Na této ploše je velikost vektoru \mathbf{j} konstantní a jeho směr je

totožný se směrem vnější normály elementu plochy $d\mathbf{S} = \mathbf{r}_0 dS$. Pro vektor proudové hustoty tedy platí

$$\mathbf{j} = \frac{I}{2\pi r^2} \mathbf{r}_0.$$

Intenzitu elektrického pole dostaneme z Ohmova zákona

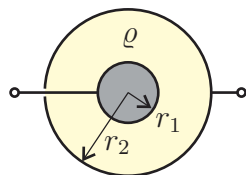
$$\mathbf{E} = \varrho \mathbf{j} = \frac{\varrho I}{2\pi r^2} \mathbf{r}_0,$$

takže pro napětí mezi body vzdálenými r_A a r_B od drátu můžeme psát

$$\Delta U = \int_{r_A, \mathcal{L}}^{r_B} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_{r_A, \mathcal{L}}^{r_B} \frac{\varrho I}{2\pi r^2} \mathbf{r}_0 \cdot d\mathbf{r} = \frac{\varrho I}{2\pi} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = \frac{\varrho I}{2\pi} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) = \frac{\varrho I}{2\pi} \frac{r_B - r_A}{r_A r_B}.$$

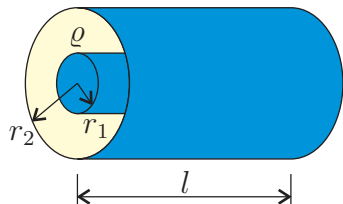
Z výsledku je patrné, že pokud se dostaneme do blízkosti spadlého drátu (člen $r_A r_B$ ve jmenovateli je malý), musíme snižovat velikost krokového napětí tím, že budeme dělat malé kroky (zmenšovat $|r_B - r_A|$).

■ Příklad 13.4: Kulový rezistor



Kulový rezistor je tvořen dvěma soustřednými elektrodami o poloměrech r_1 a r_2 , mezi nimiž je materiál s konstantní rezistivitou ϱ . Vypočítejte elektrický odpor takového rezistoru. Jestliže má prostředí rezistoru permitivitu ε , čemu se rovná součin odporu a kapacity této součástky? Viz příklad 12.14.

■ Příklad 13.5: Válcový rezistor



Válcový rezistor je tvořen dvěma souosými elektrodami tvaru pláště válce o poloměrech r_1 , r_2 a délce l . Prostor mezi elektrodami je vyplněn materiálem o rezistivitě ϱ . Vypočítejte elektrický odpor tohoto rezistoru. Jestliže má prostředí rezistoru permitivitu ε , čemu se rovná součin jeho odporu a kapacity? Viz příklad 12.16.

Řešení:

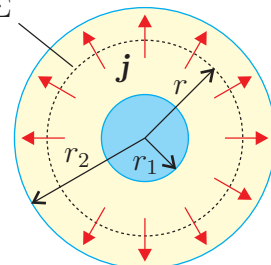
Pro proudovou hustotu mezi elektrodami bude díky válcové symetrii platit $\mathbf{j} = j(r) \mathbf{r}_0$, kde jednotkový vektor \mathbf{r}_0 míří kolmo k ose elektrod.

Zvolíme-li za integrační plochu plášť válce o poloměru r s osou Σ totožnou s osou elektrod, můžeme psát

$$I = \iint_{\Sigma} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\Sigma} j(r) \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}_0 dS = j \iint_{\Sigma} dS = 2\pi r l j.$$

takže pro proudovou hustotu platí

$$\mathbf{j} = \frac{I}{2\pi l r} \mathbf{r}_0.$$



Z Ohmova zákona plyne

$$\mathbf{E} = \varrho \mathbf{j} = \frac{\varrho I}{2\pi l r} \mathbf{r}_0,$$

takže pro napětí mezi elektrodami můžeme psát

$$U = \int_{r_1, \mathcal{L}}^{r_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \frac{\varrho I}{2\pi l} \int_{r_1, \mathcal{L}}^{r_2} \frac{\mathbf{r}_0 \cdot d\mathbf{r}}{r} = \frac{\varrho I}{2\pi l} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\varrho I}{2\pi l} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Pro elektrický odpor válcového rezistoru tedy platí

$$R = \frac{U}{I} = \frac{\varrho}{2\pi l} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Jestliže má prostředí rezistoru permitivitu ε , bude mít tento „rezistor“ kapacitu (viz příklad 12.16)

$$C = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln \frac{r_2}{r_1}},$$

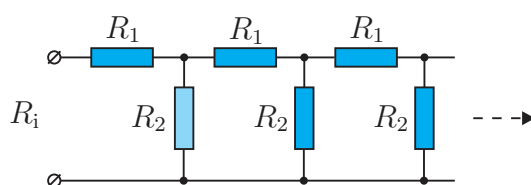
takže pro součin kapacity a odporu dostaneme (opět)

$$RC = \varrho\varepsilon.$$

■ Příklad 13.6: Kondenzátor se svodovým odporem

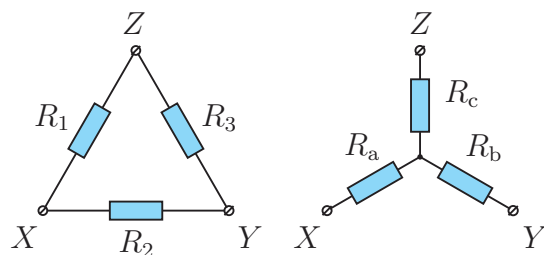
Kondenzátor, který má kapacitu C a svodový odpor R je nabit na napětí U_0 . Za jaký čas toto napětí poklesne p -krát?

■ Příklad 13.7: Nekonečná odporová síť



Vypočítejte vstupní odpor R_i nekonečné odporové sítě z obrázku.

⊙ Příklad 13.8: Transfigurace



Rezistory R_1 , R_2 a R_3 jsou zapojeny „do trojúhelníku“. Najděte odpory rezistorů R_a , R_b a R_c náhradního obvodu „do hvězdy“ tak, aby mezi svorkami XY, YZ a XZ byly stejné elektrické odpory.

Řešení: Pro odpory mezi jednotlivými svorkami v zapojení „do trojúhelníku“ platí

$$\begin{aligned} R_{XY} &= R_2 || (R_1 + R_3) = \frac{R_2(R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}, \\ R_{YZ} &= R_3 || (R_1 + R_2) = \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3}, \\ R_{XZ} &= R_1 || (R_2 + R_3) = \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}. \end{aligned}$$

V zapojení „do hvězdy“ dostaneme

$$R_{XY} = R_a + R_b, \quad R_{YZ} = R_b + R_c, \quad R_{XZ} = R_a + R_c.$$

Porovnáním příslušných odporů pak dostaneme soustavu

$$R_a + R_b = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}, \quad (1a)$$

$$R_b + R_c = \frac{R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}, \quad (1b)$$

$$R_a + R_c = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}. \quad (1c)$$

Odečtením (1b) od (1a) dostaneme

$$R_a - R_c = \frac{R_1 R_2 - R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}.$$

Porovnáním této rovnice s rovnicí (1c) ihned vidíme, že

$$R_a = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}, \quad R_c = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}.$$

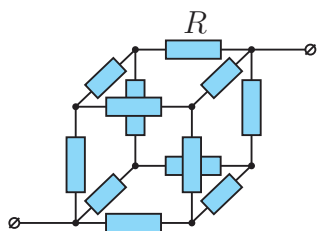
Odečtením (1c) od (1b) dostaneme

$$R_b - R_a = \frac{R_2 R_3 - R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}.$$

Porovnáním této rovnice s rovnicí (1a) ihned dostaneme

$$R_b = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}.$$

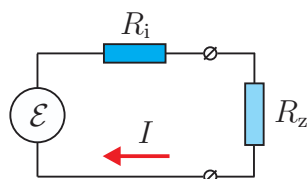
■ Příklad 13.9: Odporová krychle



Vypočítejte elektrický odpor R_k „krychlového“ zapojení rezistorů z obrázku, jestliže odpor každého z nich je R .

■ Příklad 13.10: Maximální výkon

Zdroj elektromotorického napětí \mathcal{E} má vnitřní odpor R_i . Jaký zatěžovací odpor R_z musíme k tomuto zdroji připojit, abychom do něj dodali maximální výkon? Jakou má tento maximální výkon hodnotu?

Řešení:

Po připojení zátěže začne obvodem protékat proud o velikosti

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_i + R_z}.$$

Pro výkon dodávaný do zátěže tedy platí

$$P = R_z I^2 = \frac{R_z \mathcal{E}^2}{(R_z + R_i)^2}.$$

Hledáme extrém

$$\frac{dP}{dR_z} = \mathcal{E}^2 \frac{R_i - R_z}{(R_i + R_z)^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_i = R_z.$$

Výkon dodávaný do zátěže v závislosti na jejím odporu je nezáporná funkce. Jelikož zřejmě platí

$$\lim_{R_z \rightarrow 0+} P = \lim_{R_z \rightarrow \infty} P = 0$$

a extrém jsme našli jen jeden, musí se jednat o maximum. Maximální výkon tedy do zátěže dodáme, pokud velikost jejího odporu bude rovna vnitřnímu odporu zdroje a bude pro něj platit

$$P_{\max} = \frac{\mathcal{E}^2}{4R_i}.$$

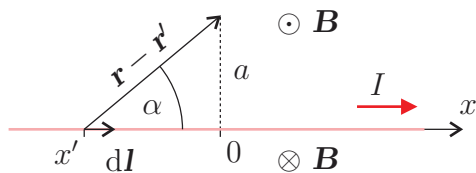
■ Příklad 13.11: Topná spirálaMáte k dispozici zdroj elektromotorického napětí $\mathcal{E} = 12 \text{ V}$ a drát z konstantanu o průměru $d = 0,5 \text{ mm}$ a rezistivitě $\varrho = 5 \times 10^{-7} \Omega \text{m}$. Jakou délku tohoto drátu potřebujete na zhotovení topné spirály o výkonu $P = 10 \text{ W}$?

14. Magnetostatické pole

■ Příklad 14.1: Magnetické pole v okolí přímého proudovodiče

Vypočítejte magnetickou indukci ve vzdálenosti a od nekonečně dlouhého přímého vodiče protékaného proudem I .

Řešení:



K výpočtu vektoru magnetické indukce můžeme použít Biotův-Savartův zákon

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\mathcal{L}} \frac{d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3},$$

kde μ_0 je magnetická konstanta a \mathbf{r}' polohový vektor elementu $d\mathbf{l}'$. Ten je orientován ve směru toku elektrického proudu.

Směr vektoru magnetické indukce vyplývá z vlastností vektorového součinu a v tomto případě je jeho směr kolmý k rovině nákresu (viz obrázek). Jelikož platí

$$|d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')| = dx' \sqrt{a^2 + x'^2} \sin \alpha \quad \text{a} \quad \sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + x'^2}},$$

můžeme pro velikost magnetické indukce psát

$$B = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx'}{(a^2 + x'^2)^{3/2}} = \left| \begin{array}{l} x' = a \tan \vartheta, \quad dx' = a d\vartheta / \cos^2 \vartheta \\ -\infty \rightarrow -\pi/2, \quad \infty \rightarrow \pi/2 \end{array} \right| =$$

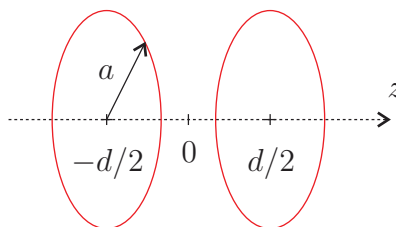
$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \vartheta d\vartheta = \frac{\mu_0 I}{2\pi a},$$

kde jsme využili známého vzorce $1 + \tan^2 \vartheta = 1/\cos^2 \vartheta$. Velikost vektoru magnetické indukce klesá s první mocninou vzdálenosti od proudovodiče, stejně jako velikost vektoru intenzity elektrického pole od nekonečně dlouhé nabitě niti (viz příklad 12.7).

■ Příklad 14.2: Magnetické pole v ose kruhové smyčky

Vypočítejte magnetickou indukci v ose kruhové smyčky o poloměru a , kterou protéká proud I .

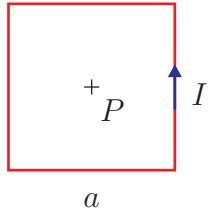
⊙ Příklad 14.3: Helmholtzovy cívky



V jaké vzdálenosti d od sebe musí být dvě souosé kruhové smyčky stejného poloměru a protékané stejným směrem stejným proudem I , aby magnetická indukce na ose mezi cívkami byla téměř konstantní? Jaká je velikost této indukce?

Nápověda: Pro velikost vektoru magnetické indukce uprostřed mezi cívkami musí platit $d^2 B/dz^2 = 0$.

Příklad 14.4: Magnetické pole ve středu čtvercové smyčky

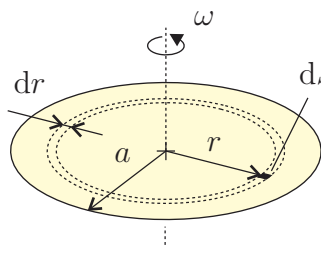


Vypočítejte magnetickou indukci uprostřed čtvercové smyčky o straně a protékané proudem I .

Příklad 14.5: Magnetické pole v ose nabitého rotujícího disku

Vypočítejte magnetickou indukci v ose tenkého dielektrického disku o poloměru a , rovnoměrně nabitého plošnou hustotou náboje σ , který se kolem své osy otáčí úhlovou rychlostí ω .

Řešení:



Pro element plochy (v polárních souřadnicích) můžeme psát $dS = dr \times r d\varphi$, takže pro náboj tohoto plošného elementu platí $dq = \sigma dS = \sigma r dr d\varphi$. Pro konvekční (plošný) proud protékající „smyčkou“ o poloměru r a šířce dr tedy můžeme psát

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{\sigma r dr d\varphi}{dt} = \sigma r \frac{d\varphi}{dt} dr = \sigma \omega r dr.$$

Tento proud vytváří ve vzdálenosti z v ose smyčky magnetickou indukci (viz příklad 14.2)

$$dB = \frac{\mu_0 I r^2}{2(r^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 \sigma \omega r^3 dr}{2(r^2 + z^2)^{3/2}},$$

kteřá má pro $\sigma > 0$ směr vektoru úhlové rychlosti ω . Celkovou indukci dostaneme „sečtením“ příspěvků od všech smyček

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \int_0^a \frac{r^3 dr}{(z^2 + r^2)^{3/2}} = \left| \begin{array}{l} r = z \tan \alpha \rightarrow dz = (z / \cos^2 \alpha) d\alpha \\ 0 \rightarrow 0, \quad a \rightarrow \arctan a/z \end{array} \right| = \\ &= \frac{\mu_0 \sigma \omega z}{2} \int_0^{\arctan a/z} \tan^3 \alpha \cos \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 \sigma \omega z}{2} \int_0^{\arctan a/z} \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \sin \alpha d\alpha = \\ &= \left| \begin{array}{l} \zeta = \cos \alpha \rightarrow d\zeta = -\sin \alpha d\alpha \\ 0 \rightarrow 1, \arctan a/z \rightarrow \cos \arctan a/z = (1 + a^2/z^2)^{-1/2} \end{array} \right| = \\ &= \frac{\mu_0 \sigma \omega z}{2} \int_1^{(1+a^2/z^2)^{-1/2}} \frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^2} d\zeta = \frac{\mu_0 \sigma \omega z}{2} \left[\zeta + \frac{1}{\zeta} \right]_1^{(1+a^2/z^2)^{-1/2}} = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \left[\frac{a^2 + 2z^2}{\sqrt{a^2 + z^2}} - 2z \right], \end{aligned}$$

kde bylo využito vztahu

$$\cos x = \frac{\cos x}{1} = \frac{\cos x}{\sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} \Rightarrow \cos \arctan a/z = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2/z^2}}.$$

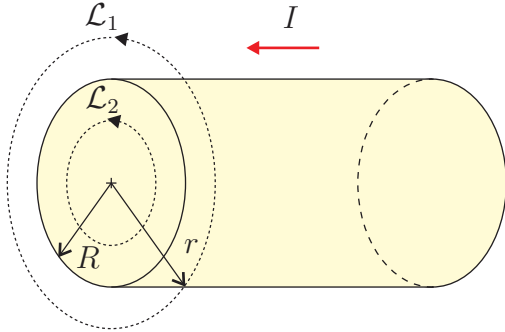
Příklad 14.6: Magnetické pole v ose rotující nabité koule

Vodivá koule o poloměru a nabitá nábojem Q rotuje kolem své osy úhlovou rychlostí ω . Vypočítejte magnetickou indukci v ose rotace ve vzdálenosti $z > 0$ od středu koule, jestliže pro permeabilitu prostředí uvnitř i vně koule platí $\mu = \mu_0$.

Příklad 14.7: Magnetické pole uvnitř a vně přímého proudovodiče

Vypočítejte magnetickou indukci uvnitř a vně nekonečně dlouhého přímého proudovodiče kruhového průřezu o poloměru R , protékaného proudem I . Předpokládejte přitom, že proudová hustota uvnitř vodiče je konstantní a pro permeabilitu vodiče platí $\mu = \mu_0$.

Řešení:



S ohledem na osovou symetrii úlohy můžeme k určení magnetické indukce použít Ampérův zákon

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I,$$

kde I je proud protékající uzavřenou křivkou \mathcal{L} , po níž se integrál počítá. S ohledem na osovou symetrii musí velikost vektoru magnetické indukce záviset pouze na vzdálenosti od osy symetrie $B = B(r)$. Směr tohoto vektoru určíme pomocí pravidla pravé ruky.

Pro $r > R$ zvolíme integrační křivku \mathcal{L}_1 jako kružnici, jejíž osa je totožná s osou proudovodiče. Z Ampérova zákona plyne

$$\oint_{\mathcal{L}_1} \mathbf{B}_o \cdot d\mathbf{l} = \oint_{\mathcal{L}_1} B_o dl = B_o \oint_{\mathcal{L}_1} dl = 2\pi r B_o = \mu_0 I \quad \Rightarrow \quad B_o = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \quad r > R,$$

přičemž integrace byla provedena proti směru hodinových ručiček a bylo využito skutečnosti, že na zvolené integrační křivce jsou (zřejmě) vektory \mathbf{B}_o a $d\mathbf{l}$ kolineární. Výsledek je stejný, jako v příkladě 14.1.

Pro případ, kdy $r < R$ protéká integrační smyčkou pouze část celkového proudu I' , takže platí

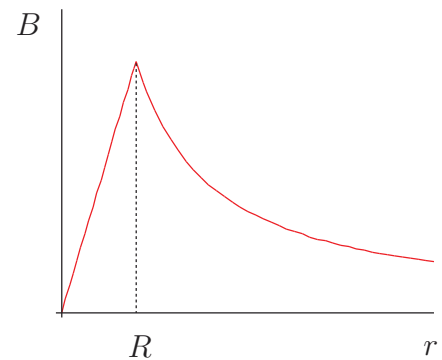
$$\oint_{\mathcal{L}_2} \mathbf{B}_i \cdot d\mathbf{l} = \oint_{\mathcal{L}_2} B_i dl = B_i \oint_{\mathcal{L}_2} dl = 2\pi r B_i = \mu_0 I' \quad \Rightarrow \quad B_i = \frac{\mu_0 I'}{2\pi r}.$$

Jelikož je proudová hustota konstantní a platí pro ni tedy $j = I/\pi R^2$, protéká integrační smyčkou proud

$$I' = \pi r^2 j = I \frac{r^2}{R^2},$$

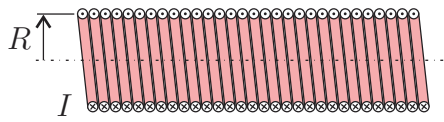
můžeme pro magnetickou indukci uvnitř proudovodiče psát

$$B_i = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r, \quad r \leq R.$$





Příklad 14.8: Magnetické pole uvnitř a vně solenoidu



Pomocí Ampérova zákona vypočítejte magnetickou indukci uvnitř a vně velmi (nekonečně) dlouhého a hustě vinutého solenoidu o poloměru R protékaného proudem I . Předpokládejte, že vinutí je tak husté, že jednotlivé závitů můžeme považovat za kruhové smyčky a na jednotku délky solenoidu připadá n závitů.

Řešení:

Vektor magnetické indukce zřejmě nebude mít azimutální složku. Kdybychom totiž za integrační křivku použili kružnici, jejíž osa by byla totožná s osou solenoidu, protékal by jí nulový proud (vinutí uvažujeme tak husté, že jednotlivé závitů můžeme nahradit kruhovými smyčkami). Vzhledem k osově symetrii úlohy musí být azimutální složka tohoto vektoru v dané vzdálenosti od osy symetrie konstantní, je-li tedy cirkulace nulová, je to zapříčiněno nulovostí této složky.

Radiální složka \mathbf{B} je zřejmě rovněž nulová, neboť příslušné příspěvky od sousedních závitů se navzájem odečítají (viz obrázek).

Zbývá tedy axiální (ve směru osy) složka vektoru magnetické indukce. Z důvodu symetrie musí velikost této složky záviset pouze na vzdálenosti od osy. Budeme-li počítat křivkový integrál vně solenoidu po trajektorii \mathcal{L}_1 , dostaneme

$$\oint_{\mathcal{L}_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B_o(a)\Delta L - B_o(b)\Delta L = 0,$$

neboť touto obdélníkovou smyčkou o délce stran $a - b$, ΔL neprotéká žádný proud. Jelikož magnetická indukce musí s rostoucí vzdáleností od solenoidu klesat, musí platit

$$\lim_{a \rightarrow \infty} B_o(a) = 0,$$

takže i $B_o(b) = 0$, magnetická indukce vně solenoidu je tedy nulová!

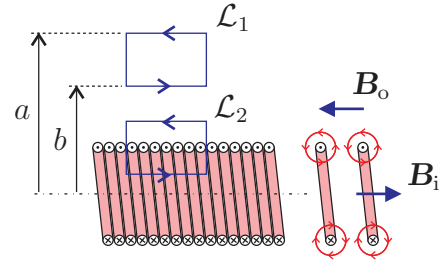
Při integraci podél trajektorie \mathcal{L}_2 dostaneme

$$\oint_{\mathcal{L}_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B_o\Delta L + B_i\Delta L = \mu_0 n \Delta L I,$$

neboť smyčkou prochází $N = n\Delta L$ závitů a protéká jí tedy celkový proud $I_c = NI = n\Delta L I$. Vzhledem k nulovosti vnějšího magnetického pole musí tedy platit

$$B_i = \mu_0 n I.$$

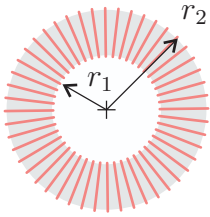
Vektor magnetické indukce uvnitř solenoidu má tedy pouze axiální složku, jejíž velikost nezávisí na vzdálenosti od osy, směr určíme pravidlem pravé ruky. Vně solenoidu je magnetické pole nulové.



Příklad 14.9: Magnetické pole v ose solenoidu

Pomocí Biotova-Savartova zákona vypočítejte magnetickou indukci v ose solenoidu délky l a poloměru R protékaného proudem I , a to jak v jeho středu, tak na okraji. Předpokládejte přitom, že vinutí je tak husté, že jednotlivé závitů lze považovat za kruhové smyčky a pro počet závitů na jednotku délky platí $n = N/l$, kde N je celkový počet závitů.

Nápověda: Využijte řešení příkladu 14.2, příspěvky od jednotlivých smyček „sečtěte“ pomocí určitého integrálu.

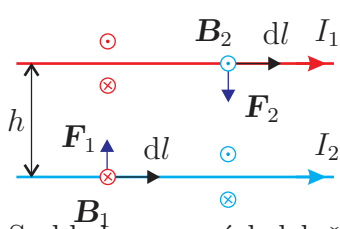
Příklad 14.10: Toroidální cívka

Na prstenci obdélníkového průřezu s vnitřním poloměrem r_1 , vnějším poloměrem r_2 šířky h , vyrobeném z materiálu o permeabilitě $\mu = \mu_0$, je velmi hustě navinuto N závitů vinutí, jež je protékáno proudem I . Vinutí je tak husté, že jednotlivé závitů můžeme považovat za kruhové smyčky. Použitím Ampérova zákona vypočítejte magnetickou indukci uvnitř této cívky.

Příklad 14.11: Síla působící na proudovodič

Dva velmi dlouhé rovnoběžné vodiče jsou protékány proudy I_1 a I_2 . Vypočítejte sílu, kterou na sebe vzájemně působí, jestliže jejich vzdálenost je h a pro permeabilitu prostředí platí $\mu = \mu_0$.

Řešení:



Pro sílu působící na proudovodič protékaný proudem I v magnetickém poli platí

$$\mathbf{F} = I \int_{\mathcal{L}} \mathbf{B} \times d\mathbf{l}.$$

Předpokládejme nejdříve, že proudy I_1 a I_2 mají stejný směr. S ohledem na výsledek řešení příkladu 14.1 pro magnetickou indukci ve vzdálenosti h od přímého proudovodiče protékaného proudem I_1 platí

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi h}.$$

Na element $d\mathbf{l}$ proudovodiče protékaného proudem I_2 působí síla o velikosti (vektory \mathbf{B}_1 a $d\mathbf{l}$ jsou na sebe kolmé)

$$dF_1 = I_2 B_1 dl = \frac{\mu_0 I_1 I_2 dl}{2\pi h},$$

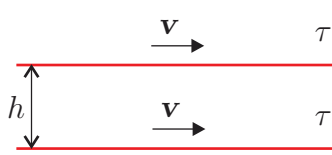
přičemž s ohledem na vlastnosti vektorového součinu míří tato síla směrem k proudovodiči protékanému proudem I_1 . Integrací přes úsek vodiče délky l dostaneme

$$F_1 = \int_0^l \frac{\mu_0 I_1 I_2 dl}{2\pi h} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi h}.$$

Sílu \mathbf{F}_2 určíme ze zákona akce a reakce: $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1$.

Pokud bude směr proudů I_1 a I_2 opačný, budou (z vlastností vektorového součinu) síly \mathbf{F}_1 a \mathbf{F}_2 odpudivé.

■ **Příklad 14.12: Dvě nabité niti, tentokrát v pohybu**



Dvě velmi dlouhé niti nabité s lineární hustotou náboje τ , jejichž vzájemná vzdálenost je h , se vzhledem k pozorovateli P pohybují ve směru svých os rychlostí o velikosti v . Jakou silou na sebe tyto niti vzhledem k pozorovateli P působí, jestliže pro permitivitu a permeabilitu prostředí platí $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$?

■ **Příklad 14.13: Nabitá částice v homogenním magnetickém poli**

Najděte trajektorii částice o hmotnosti m a náboji q , která se pohybuje v homogenním magnetickém poli, pro jehož magnetickou indukci platí $\mathbf{B} = (0, 0, B_0)$. Pro vektor rychlosti částice v čase $t = 0$ platí $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$.

Řešení: Pohybová rovnice má tvar

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

Rozepíšeme vektorový součin do složek

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B_0 \end{vmatrix} = (v_y B_0, -v_x B_0, 0),$$

takže pohybovou rovnici můžeme zapsat ve složkách

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{qB_0}{m} v_y, \quad \frac{dv_y}{dt} = -\frac{qB_0}{m} v_x, \quad \frac{dv_z}{dt} = 0.$$

Třetí z rovnic je na prvních dvou nezávislá a s ohledem na počáteční podmínky z ní vyplývá

$$v_z = \text{konst.} = v_{0z}, \quad z = v_{0z}t + c_z.$$

První dvě rovnice tvoří homogenní soustavu, kterou můžeme zapsat v maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix},$$

kde $\alpha = qB_0/m$. Najdeme vlastní čísla matice soustavy

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \alpha \\ -\alpha & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \alpha^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm i\alpha$$

a např. pro $\lambda = -i\alpha$ najdeme vlastní vektory

$$\left[\begin{array}{cc|c} i\alpha & \alpha & 0 \\ -\alpha & i\alpha & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \Rightarrow \quad \text{báze: } \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}, \quad \text{funkce: } \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} e^{-i\alpha t}.$$

Řešení soustavy tedy můžeme psát ve tvaru

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} e^{-i\alpha t} = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} (\cos \alpha t - i \sin \alpha t) = \begin{bmatrix} \cos \alpha t - i \sin \alpha t \\ -\sin \alpha t - i \cos \alpha t \end{bmatrix}.$$

Fundamentální systém soustavy obsahuje v jednotlivých sloupcích reálnou a imaginární část této vektorové funkce, takže platí

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \cos \alpha t & -\sin \alpha t \\ -\sin \alpha t & -\cos \alpha t \end{bmatrix},$$

takže obecné řešení soustavy můžeme psát ve tvaru

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \mathbf{V} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha t & -\sin \alpha t \\ -\sin \alpha t & -\cos \alpha t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \cos \alpha t - c_2 \sin \alpha t \\ -c_1 \sin \alpha t - c_2 \cos \alpha t \end{bmatrix}.$$

Jelikož pro $t = 0$ platí $[v_x, v_y]^T = [v_{0x}, v_{0y}]^T$, dostaneme dosazením do řešení výsledek

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ -c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{0x} \cos \alpha t + v_{0y} \sin \alpha t \\ -v_{0x} \sin \alpha t + v_{0y} \cos \alpha t \end{bmatrix}.$$

Vektor rychlosti částice má tedy složky

$$v_x = v_{0x} \cos \alpha t + v_{0y} \sin \alpha t, \quad v_y = -v_{0x} \sin \alpha t + v_{0y} \cos \alpha t, \quad v_z = v_{0z}.$$

Vzorce pro složky v_x a v_y můžeme dále zjednodušit. Zavedeme-li

$$v_{0\perp} = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2}, \quad v_{0x} = v_{0\perp} \cos \varphi_0, \quad v_{0y} = v_{0\perp} \sin \varphi_0,$$

můžeme pro složky v_x a v_y psát

$$\begin{aligned} v_x &= v_{0\perp} (\cos \alpha t \cos \varphi_0 + \sin \alpha t \sin \varphi_0) = v_{0\perp} \cos(\alpha t - \varphi_0), \\ v_y &= -v_{0\perp} (\sin \alpha t \cos \varphi_0 - \cos \alpha t \sin \varphi_0) = -v_{0\perp} \sin(\alpha t - \varphi_0). \end{aligned}$$

Integrací dále dostaneme složky polohového vektoru částice

$$\begin{aligned} x &= \frac{v_{0\perp}}{\alpha} \sin(\alpha t - \varphi_0) + c_x = \frac{mv_{0\perp}}{qB_0} \sin\left(\frac{qB_0}{m}t - \varphi_0\right) + c_x, \\ y &= \frac{v_{0\perp}}{\alpha} \cos(\alpha t - \varphi_0) + c_y = \frac{mv_{0\perp}}{qB_0} \cos\left(\frac{qB_0}{m}t - \varphi_0\right) + c_y, \\ z &= v_{0z}t + c_z, \end{aligned}$$

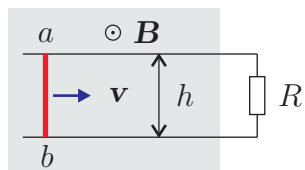
kde c_x, c_y, c_z jsou integrační konstanty. Částice se tedy pohybuje po šroubovici, jejíž osa je rovnoběžná s vektorem magnetické indukce. Šroubovice má (cyklotronový) poloměr $r_c = mv_{0\perp}/(qB_0)$, pro úhlovou (cyklotronovou) frekvenci oběhu částice v rovině kolmé na vektor magnetické indukce platí $\omega_c = qB_0/m$.

■ **Příklad 14.14:** Nabitá částice ve zkříženém elektrickém a magnetickém poli

Najděte časovou závislost polohového vektoru a rychlosti částice o hmotnosti m a náboji q ve zkříženém homogenním elektrickém a magnetickém poli s magnetickou indukcí $\mathbf{B} = (0, 0, B_0)$ a intenzitou elektrického pole $\mathbf{E} = (E_0, 0, 0)$, jestliže v čase $t = 0$ platí $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$ a $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$.

15. Elektromagnetická indukce

■ Příklad 15.1: Vodič pohybující se v magnetickém poli



Po rovnoběžných vodivých kolejnicích s roztečí h se v homogenním magnetickém poli o magnetické indukci velikosti B pohybuje vodivá spojka konstantní rychlostí o velikosti v , viz obrázek. Vypočítejte, jaký proud a jakým směrem protéká obvodem, jehož celkový odpor je R . Vypočítejte dále, jaký výkon P_e se v obvodu přeměňuje na teplo a jaký mechanický výkon P_m je třeba dodávat pohyblivé spojce, aby se pohybovala konstantní rychlostí. Vektor magnetické indukce míří ven z nákresny, spojka se pohybuje doprava, $\mathbf{v} \perp \mathbf{B}$.

Řešení: Na volné náboje v pohybující se spojce působí Lorentzova síla

$$\mathbf{F}_m = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}),$$

pro jejíž velikost (vzhledem ke kolmosti vektorů \mathbf{v} a \mathbf{B}) platí

$$F_m = qvB.$$

Jestliže vektor \mathbf{v} míří doprava a vektor \mathbf{B} ven z nákresny, viz obrázek, míří vektor síly \mathbf{F}_m , působící na kladný náboj, směrem dolů. Pro velikost magnetické síly, působící na jednotkový náboj (vtištěnou intenzitu elektrického pole) tak platí

$$E_i = \frac{F_m}{q} = vB. \quad (1)$$

Pro elektromotorické napětí indukované v obvodu tedy můžeme psát

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = \int_{r_a, \mathcal{L}}^{r_b} \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = \int_0^h vB dl = vBh.$$

Křivkový integrál po uzavřené křivce byl nahrazen integrálem pouze podél spojky, kde je síla (1) nenulová. Obvodem tedy protéká proud

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{vBh}{R}. \quad (2)$$

Jelikož směr proudu je dán směrem pohybu kladného náboje, protéká spojkou směrem dolů a obvodem se uzavírá proti směru hodinových ručiček. Pro Jouleův výkon generovaný v obvodu platí

$$P_e = I^2 R = \frac{v^2 B^2 h^2}{R}. \quad (3)$$

Protéká-li spojkou proud I v magnetickém poli, působí na ni síla

$$\mathbf{F} = I \int_{r_a, \mathcal{L}}^{r_b} d\mathbf{l} \times \mathbf{B},$$

kde integrace probíhá ve směru protékajícího proudu. Jelikož člen $d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$ má podél integrační křivky konstantní velikost a (z vlastností vektorového součinu) míří doleva, můžeme předchozí integrál zjednodušit do tvaru

$$F = I \int_0^h B dl = BIh,$$

tato síla míří doleva, tedy proti směru rychlosti spojky. Aby se spojka mohla pohybovat konstantní rychlostí doprava, musí být tato síla kompenzována silou stejné velikosti opačného znaménka, takže pro mechanický výkon kompenzační síly platí

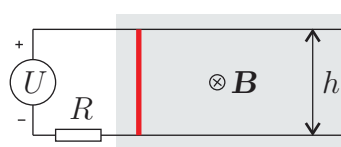
$$P_m = (-\mathbf{F}) \cdot \mathbf{v} = vBIh.$$

Dosadíme-li do posledního vzorce za proud ze vztahu (2), dostaneme

$$P_m = \frac{v^2 B^2 h^2}{R} = P_e$$

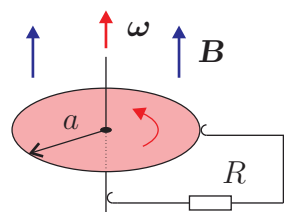
Elektrický výkon v obvodu je roven mechanickému výkonu, který je zapotřebí na udržení spojky v pohybu.

■ Příklad 15.2: Urychlovač



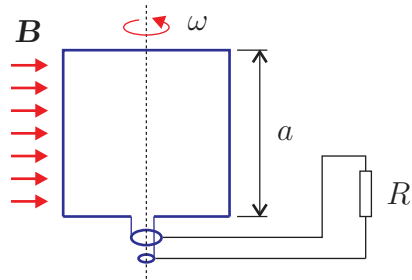
Na vodorovných vodivých kolejnicích s roztečí h je v homogenním magnetickém poli s magnetickou indukcí \mathbf{B} , viz obrázek, umístěna vodivá spojka o hmotnosti m , která se po kolejnicích může volně pohybovat. Vypočítejte, jak se bude s časem měnit rychlost pohyblivé spojky, pokud v čase $t = 0$ ke kolejnicím připojíme zdroj napětí o velikosti U , jestliže celkový elektrický odpor obvodu je R a můžeme-li tření spojky o kolejnice zanedbat. Rychlost spojky v čase $t = 0$ je nulová.

■ Příklad 15.3: Disk rotující v magnetickém poli



V homogenním magnetickém poli o indukci \mathbf{B} rotuje vodivý disk o poloměru a úhlovou rychlostí ω , přičemž platí $\mathbf{B} \uparrow \uparrow \omega$. Jaký proud a jakým směrem protéká diskem, jestliže je mezi jeho osu a vnější okraj přes kluzné kontakty připojen rezistor s odporem R ?

■ Příklad 15.4: Generátor



V homogenním magnetickém poli o indukci \mathbf{B} rotuje vodivá čtvercová smyčka o hraně a konstantní úhlovou rychlostí ω , přičemž platí $\mathbf{B} \perp \omega$. Vypočítejte, jaký proud protéká rezistorem o odporu R , který je ke smyčce připojen přes kluzné kontakty.

Řešení: V tomto případě bude zřejmě jednodušší k výpočtu použít Faradayův indukční zákon

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt} \iint_{\text{smyčka}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}.$$

Vektor magnetické indukce je konstantní, díky rotaci smyčky se v čase mění pouze orientace normálového vektoru \mathbf{n} k ploše smyčky vzhledem k vektoru \mathbf{B} . Pro magnetický indukční tok tedy můžeme psát

$$\Phi = \iint_{\text{smyčka}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{\text{smyčka}} B \cos(\omega t + \varphi_0) dS = B \cos(\omega t + \varphi_0) \iint_{\text{smyčka}} dS = a^2 B \cos(\omega t + \varphi_0),$$

kte a^2 je plocha smyčky a úhel φ_0 souvisí s orientací smyčky v nulovém čase. Derivováním dostaneme

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = \omega a^2 B \sin(\omega t + \varphi_0),$$

takže pro proud protékající zátěží můžeme psát

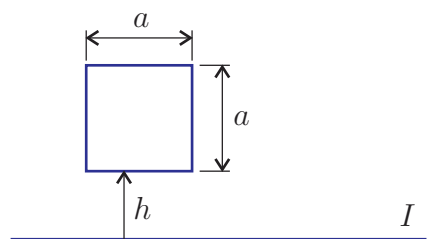
$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\omega a^2 B}{R} \sin(\omega t + \varphi_0),$$

proud je tedy střídavý, je úměrný rychlosti otáčení smyčky, její ploše a velikosti magnetické indukce.

■ **Příklad 15.5: Smyčka uvnitř solenoidu**

Velice dlouhý solenoid o poloměru a je připojen ke zdroji střídavého proudu, takže je uvnitř homogenní magnetické pole, pro jehož indukci platí $\mathbf{B} = B_0 \cos(\omega t) \mathbf{k}$. Uvnitř solenoidu je vodivá kruhová smyčka o poloměru $a/2$, elektrickém odporu R , jejíž osa je totožná s osou solenoidu. Vypočítejte proud indukovaný ve smyčce.

■ **Příklad 15.6: Smyčka poblíž proudovodiče**



Ve vzdálenosti $h = 1$ cm od velice dlouhého přímého proudovodiče, kterým protéká střídavý proud o amplitudě $I_0 = 10$ A a kmitočtu $f = 50$ Hz, se nachází vodivá čtvercová smyčka o hraně $a = 20$ cm. Vypočítejte amplitudu elektromotorického napětí indukované ve smyčce.

Nápověda: Kmitočet 50 Hz je tak nízký, že můžete předpokládat, že okamžitá hodnota proudu ve vodiči je

všude stejná a i magnetická indukce v okolí proudovodiče se mění přesně v rytmu okamžité hodnoty proudu.

■ **Příklad 15.7: Vlastní indukčnost solenoidu**

Vypočítejte vlastní indukčnost solenoidu délky l a poloměru r , na kterém je navinuto N závitů. Solenoid je navinut na materiálu, pro jehož permeabilitu platí $\mu = \mu_0$. Předpokládejte, že závity jsou navinuty tak hustě, že je můžete považovat za kruhové smyčky a že $r \ll l$.

Řešení: Jestliže délka solenoidu je výrazně větší než jeho poloměr a jestliže vinutí je velmi husté, můžeme magnetické pole uvnitř solenoidu považovat za zhruba homogenní, pro velikost magnetické indukce, viz příklad 14.8, platí

$$B = \frac{\mu_0 N I}{l},$$

vektor magnetické indukce má směr osy solenoidu. Vzhledem k výše zmíněným skutečnostem můžeme pro magnetický indukční tok jedním závitem solenoidu psát

$$\Phi_1 = BS_{\text{závit}} = \frac{\mu_0 \pi r^2 N I}{l},$$

takže pro celkový tok všemi závity solenoidu platí

$$\Phi = N\Phi_1 = \frac{\mu_0 \pi r^2 N^2 I}{l}.$$

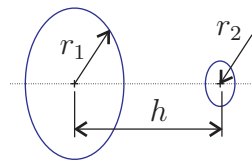
Vlastní indukčnost solenoidu pak vypočteme z definice

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 \pi r^2 N^2}{l}.$$

■ **Příklad 15.8: Vlastní indukčnost toroidální cívky**

Vypočítejte vlastní indukčnost toroidální cívky z příkladu 14.10.

■ **Příklad 15.9: Vzájemná indukčnost dvou kruhových smyček**



Vypočítejte vzájemnou indukčnost dvou souosých kruhových smyček o poloměrech r_1 a r_2 , jejichž středy leží ve vzájemné vzdálenosti a . Předpokládejte přitom, že $r_1 \gg r_2$, takže vektor magnetické indukce uvnitř menší smyčky můžete uvažovat jako homogenní. Smyčky jsou umístěny v prostředí s permeabilitou $\mu = \mu_0$.

Řešení: Protéká-li kruhovou smyčkou o poloměru r_1 proud I_1 , má vektor magnetické indukce ve vzdálenosti h od středu smyčky, viz příklad 14.2, velikost

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1 r_1^2}{2(r_1^2 + h^2)^{3/2}},$$

jeho směr je totožný s osou smyčky.

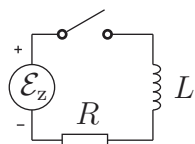
Můžeme-li magnetickou indukci uvnitř plochy smyčky o poloměru r_2 považovat za konstantní, můžeme pro magnetický indukční tok touto smyčkou psát

$$\Phi_{21} = B_1 S_2 = \frac{\mu_0 I_1 \pi r_1^2 r_2^2}{2(r_1^2 + h^2)^{3/2}}.$$

Pro vzájemnou indukčnost obou smyček můžeme z definice psát

$$M = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{\mu_0 \pi r_1^2 r_2^2}{2(r_1^2 + h^2)^{3/2}}.$$

Příklad 15.10: Obvod s indukčností



Zdroj elektromotorického napětí o velikosti \mathcal{E}_z je v čase $t = 0$ připojen k obvodu s elektrickým odporem R a indukčností L , viz obrázek. Vypočítejte, jak se s časem bude měnit proud obvodem, jestliže pro $t = 0$ platí $i = 0$.

Řešení: Jelikož úbytek napětí na rezistoru se musí rovnat celkovému elektromotorickému napětí v obvodu, můžeme psát

$$Ri = \mathcal{E}_z + \mathcal{E}_i = \mathcal{E}_z - L \frac{di}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{\mathcal{E}_z}{L}.$$

Jedná se o nehomogenní lineární diferenciální rovnici prvního řádu s konstantními koeficienty, jejíž řešení nalezneme jako součet obecného řešení přidružené homogenní diferenciální rovnice a partikulárního řešení rovnice nehomogenní. Dostaneme tak

$$i = i_o + i_p = Ae^{-\frac{R}{L}t} + \frac{\mathcal{E}_z}{R},$$

kde A je integrační konstanta, kterou určíme z počáteční podmínky $i(0) = 0$.

Můžeme tedy psát

$$0 = A + \frac{\mathcal{E}_z}{R} \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{\mathcal{E}_z}{R} \quad \Rightarrow \quad i = \frac{\mathcal{E}_z}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

Proud obvodem se asymptoticky blíží k hodnotě

$$i_\infty = \frac{\mathcal{E}_z}{R}.$$

16. Pár příkladů z vektorové analýzy

■ Příklad 16.1: Gradient

Nechť $\mathbf{R} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, kde x_0, y_0, z_0 jsou konstanty. Vypočítejte

- 1) $\nabla |\mathbf{R}|$,
- 2) $\nabla (1/|\mathbf{R}|)$.

■ Příklad 16.2: Kopec

Výšku jistého nejmenovaného kopečku můžeme v jistých souřadnicích popsat pomocí následující funkce

$$h(x, y) = 10(2xy - 3x^2 - 4y^2 - 18x + 28y + 12),$$

kde h, x, y jsou výška a souřadnice v rovině udávané v metrech. Na jaké souřadnici se nachází vrchol kopce a jaká je jeho výška? Nacházíme-li se v místě o souřadnicích $A = [1, 1]$, jakým směrem se musíme vydat, abychom postupovali do největšího kopce? Jakým směrem bychom se měli vydat, abychom postupovali po vrstevnici?

■ Příklad 16.3: Divergence

Nechť $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Vypočítejte

- 1) $\nabla \cdot \mathbf{r}$,
- 2) $\nabla \cdot (\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3)$, $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$,
- 3) $\nabla \cdot \mathbf{E}$, kde $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp[i(\omega t - \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r})]$, $\mathbf{E}_0, \mathbf{k}_0$ jsou konstantní vektory.

■ Příklad 16.4: Rotace

Vypočítejte $\nabla \times \mathbf{F}$, kde

- 1) $\mathbf{F} = (-\omega y, \omega x, 0)$,
- 2) $\mathbf{F} = \alpha \mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$, kde $\mathbf{r} = (x, y, z) \neq \mathbf{0}$,
- 3) $\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 \exp[i(\omega t - \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r})]$, $\mathbf{F}_0, \mathbf{k}_0$ jsou konstantní vektory a $\mathbf{r} = (x, y, z)$.

■ Příklad 16.5: Potenciál

Jisté silové pole lze popsat pomocí funkčního předpisu pro jeho intenzitu

$$\mathbf{K} = (2xy + z^3, x^2 + 2y, 3xz^2 - 2).$$

Je toto pole potenciální? Pokud ano, najděte jeho potenciál φ , pro který platí $\mathbf{K} = -\nabla \varphi$.

■ Příklad 16.6: Křivkový integrál

Vektorové pole je dáno předpisem $\mathbf{F} = (x + y, y - x, 0)$. Vypočítejte integrál

$$A = \int_{\mathbf{r}_A, \mathcal{L}}^{\mathbf{r}_B} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

z bodu $\mathbf{r}_A = (-1, 1, 0)$ do bodu $\mathbf{r}_B = (1, 1, 0)$ po trajektorii

$$\mathcal{L}_1: \mathbf{r} = (t, 1, 0), \quad t \in \langle -1, 1 \rangle \quad \text{a} \quad \mathcal{L}_2: \mathbf{r} = (t, t^2, 0), \quad t \in \langle -1, 1 \rangle .$$

Vypočítejte dále $\nabla \times \mathbf{F}$. Jak spolu výsledky souvisí?

17. Vsledky

1. Rozměrová analýza

[1.2] Pro rychlost sypání písku v přesýpacích hodinách platí

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = k \rho g^{1/2} S^{5/4},$$

kde k je bezrozměrný koeficient, který pomocí rozměrové analýzy určit nejde. ■

[1.3] Pro tlak uvnitř hvězdy (planety) dostaneme

$$p \propto \varkappa \frac{M^2}{R^4},$$

konkrétně pro Slunce $p_S \approx 10^{15}$ Pa, pro Zemi $p_Z \approx 10^{12}$ Pa. Současné odhady tlaku v nitru Slunce a Země jsou $p_S = 2 \times 10^7$ GPa, $p_Z = 3,5 \times 10^5$ MPa, odkud je vidět, že odhad pomocí rozměrové analýzy není špatný. ■

[1.4] Pro Planckův čas, Planckovu délku a Planckovu hmotnost postupně dostaneme

$$t_p = \sqrt{\frac{\varkappa \hbar}{c^5}} \approx 10^{-43} \text{ s}, \quad l_p = ct_p = \sqrt{\frac{\varkappa \hbar}{c^3}} \approx 10^{-35} \text{ m}, \quad m_p = \sqrt{\frac{c \hbar}{\varkappa}} \approx 10^{-8} \text{ kg}.$$

[1.5] Vzorec pro frekvenci struny má tvar

$$f = \frac{k}{l} \sqrt{\frac{F}{\mu}},$$

kde k je bezrozměrná konstanta. Vzorec odpovídá zkušenosti, že silnější („těžší“) a delší struny zní na nižší frekvenci a naopak, s rostoucím napětím frekvence struny stoupá. Řešením pohybové rovnice struny (parciální diferenciální rovnice) bychom zjistili, že $k = n/2$, kde $n = 1, 2, 3, \dots$ (základní frekvence a vyšší harmonické). ■

2. Kinematika

[2.1] Pro poměr rychlosti jízdy autobusu c a chůze studenta v dostaneme

$$\frac{c}{v} = \frac{T_v + T_p}{T_v - T_p} = 9,$$

pro interval T autobusů potom

$$T = \frac{2T_v T_p}{T_v + T_p} = 12 \text{ minut.}$$

■

[2.3] Srážka nastane v čase

$$t_s = \frac{v_r - v_n \pm \sqrt{(v_r - v_n)^2 - 2as_0}}{a} = 20 \text{ s}$$

od okamžiku, kdy strojvůdce spatří nákladní vlak. Stane se tak ve vzdálenosti

$$x_s = -\frac{1}{2}at_s^2 + v_rt_s = 400 \text{ m}$$

od místa kde strojvůdce nákladní vlak spatřil, relativní rychlost vlaků při srážce je

$$v_s = -at_s + v_r - v_n = 0 \text{ m s}^{-1}.$$

■

[2.4] Pro hledanou rychlost \bar{v}_2 platí

$$\bar{v}_2 = \frac{\bar{v}_1 \bar{v}}{2\bar{v}_1 - \bar{v}} = 60 \text{ km h}^{-1}.$$

Aby mohlo být dosaženo požadované průměrné rychlosti, musí platit $\bar{v}_1 > \bar{v}/2$. Pro $\bar{v}_1' = 10 \text{ km h}^{-1}$ již není možné dosáhnout plánované průměrné rychlosti $\bar{v} = 20 \text{ km h}^{-1}$. ■

[2.6] Člověk s dopisem pošťáka doběhne pokud poběží pod úhlem

$$56^\circ 26' 34'' \leq \alpha \leq 123^\circ 33' 26'',$$

kde maximální a minimální úhel jsou řešeními rovnice

$$\sin \alpha = \frac{v_1 h}{v_2 s}.$$

Minimální rychlost, kterou lze pošťáka ještě doběhnout je

$$v_{2 \min} = \frac{v_1 h}{s} = 2,5 \text{ m s}^{-1}.$$

■

[2.7] Vzájemnou vzdálenost $l_{\text{FB}}(t)$, okamžik největšího přiblížení t_n a nejmenší vzájemnou vzdálenost l_n dostaneme jako

$$l_{\text{FB}}(t) = \sqrt{(l_F - v_F t)^2 + v_B^2 t^2}, \quad t_n = \frac{l_F v_F}{v_B^2 + v_F^2}, \quad l_n = \frac{l_F v_B}{\sqrt{v_B^2 + v_F^2}}.$$

■

[2.8] Pro vzájemnou vzdálenost těles platí

$$l(t) = vt\sqrt{5 - 4 \cos \alpha}.$$

■

[2.10] Výpravčího bude n -tý vagón míjet po dobu

$$\Delta t_n = \Delta t_1(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}).$$

■

[2.11] Pro rychlost v a polohu x bodu platí

$$v = a_0 t - \frac{a_0}{k} (1 - e^{-kt}), \quad x = \frac{1}{2} a_0 t^2 - \frac{a_0}{k} t + \frac{a_0}{k^2} (1 - e^{-kt}).$$

■

[2.12] Zrychlení hmotného bodu je dáno funkcí

$$a = a_0 \left(1 - \frac{t}{\tau}\right).$$

Pro rychlost a polohu v čase τ platí

$$v_\tau = \frac{a_0 \tau}{2} = 100 \text{ m s}^{-1}, \quad x_\tau = \frac{a_0 \tau^2}{3} = 1\,333,3 \text{ m}.$$

■

[2.13] Pro složky vektoru rychlosti platí

$$v_x = -\omega A \sin \omega t, \quad v_y = \omega B \cos \omega t,$$

velikost tohoto vektoru je

$$v = |\omega| B \sqrt{1 + \frac{A^2 - B^2}{B^2} \sin^2 \omega t}, \quad |\omega| B \leq v \leq |\omega| A.$$

Pro složky a velikost vektoru zrychlení dostaneme

$$a_x = -\omega^2 A \cos \omega t, \quad a_y = -\omega^2 B \sin \omega t, \quad a = \omega^2 B \sqrt{1 + \frac{A^2 - B^2}{B^2} \cos^2 \omega t}.$$

■

[2.15] Polohový vektor kamínku má složky

$$x = R(\omega t - \sin \omega t), \quad z = R(1 - \cos \omega t),$$

kde $\omega = u/R$ je úhlová rychlost otáčení kola. Pro složky vektoru rychlosti dostaneme

$$v_x = \omega R(1 - \cos \omega t) = u(1 - \cos \omega t), \quad v_z = \omega R \sin \omega t = u \sin \omega t,$$

pro velikost vektoru rychlosti potom

$$v = |u| \sqrt{2(1 - \cos \omega t)}.$$

Maximální rychlost $v_{\max} = 2|u|$ (když je kamínek nejvýše), minimální rychlost $v_{\min} = 0$ (když se dotýká země). Pro složky a velikost vektoru zrychlení platí

$$a_x = \omega^2 R \sin \omega t, \quad a_z = \omega^2 R \cos \omega t, \quad a = \omega^2 R = \frac{u^2}{R}.$$

■

[**2.16**] Doba průchodu kuličky žlábkem t_p je dána vztahem

$$t_p = 2\sqrt{\frac{R}{g}} \quad (\text{nezávisí na úhlu } \alpha).$$

■

[**2.17**] Pro hloubku studny platí

$$h = c \left[t + \frac{c}{g} - \sqrt{c^2 \left(\frac{1}{g} + \frac{t}{c} \right)^2 - t^2} \right] = 162,8 \text{ m}.$$

■

[**2.18**] Pro délku i -tého úseku volného pádu platí

$$x_i = \frac{2i-1}{n^2} h.$$

■

[**2.19**] Doba pádu v i -tém úseku je

$$t_i = \sqrt{\frac{2h}{ng}} \left(\sqrt{i} - \sqrt{i-1} \right).$$

■

[**2.22**] Lovec musí vystřelit přímo na opici pod úhlem

$$\alpha = \arctan \frac{h}{d}.$$

■

[**2.23**] Bomba musí být vypuštěna ve vzdálenosti

$$d = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

od cíle, na který dopadne rychlostí

$$v_d = \sqrt{v_0^2 + 2gh}.$$

[2.24] Předmětem musíme mrštit pod elevačním úhlem $\alpha = \arctan 4 \approx 75^\circ 57' 50''$.

[2.26] Minimální vzdálenost od útesu, kam ještě může dopadnout dělová koule (maximální vzdálenost, kde je pirátská loď ještě v bezpečí) je tedy

$$x_m = -\frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} + \frac{hv_0^2}{g} - \sqrt{\frac{h^2v_0^4}{g^2} - h^2d^2}} = 37,9 \text{ m.}$$

[2.28] Pro velikost zrychlení mouchy platí

$$a = \sqrt{k^2 + \frac{k^4 t^4}{R^2}}.$$

[2.30] Pro zrychlení setrvačníku v průběhu brzdění platí

$$\varepsilon = -\frac{2\pi f_0}{\tau} = -\frac{5}{3}\pi \text{ s}^{-2},$$

vykoná při tom

$$N = \frac{f_0 \tau}{2} = 375 \text{ otoček.}$$

[2.31] Polohu raket nejlépe vyjádříme v polárních souřadnicích. Vzdálenost raket r od středu (místa srážky) a úhly jednotlivých raket φ_i jsou

$$r = \frac{1}{\sqrt{2}}(a - vt), \quad \varphi_i = \varphi_{0i} + \ln\left(\frac{a}{a - vt}\right) \Rightarrow \varphi_i = \varphi_{0i} - \ln\left(\frac{\sqrt{2}r}{a}\right),$$

kde φ_{0i} jsou jejich počáteční úhly. Okamžik srážky nastane v čase $t_s = a/v$.

3. Dynamika hmotného bodu

[3.2] Lano nad a pod vzpěrou a vzpěra jsou namáhány silami o velikostech

$$T_n = 2mg, \quad T_p = mg, \quad T_v = \sqrt{3}mg.$$

[3.4] Závaží se pohybují se zrychlením

$$a_1 = -2a_2 = \frac{4m_1 - 2m_2}{4m_1 + m_2}g,$$

pro velikost síly napínající vlákno platí

$$T = \frac{3m_1m_2}{4m_1 + m_2}g.$$

■

[3.6] Předmět se po nakloněné rovině bude smýkat konstantní rychlostí, pokud pro koeficient smykového tření bude platit

$$\mu = \tan \alpha.$$

■

[3.9] Pro odporovou sílu platí vztah

$$\mathbf{F} = -2mc \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{v}},$$

kde m je hmotnost lodi.

■

[3.10] Pro $\omega > \sqrt{g/R}$ pro výšku h a velikost síly F_s působící na stěnu odstředivky dostaneme

$$h = R - \frac{g}{\omega^2}, \quad F_s = m\omega^2 R,$$

pro $\omega \leq \sqrt{g/R}$ potom

$$h = 0, \quad F_s = mg,$$

■

[3.13] Pro rychlost kuličky platí

$$v = \frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right).$$

■

[3.14] Kulička se zastaví na dráze

$$s = \frac{mv_0}{k}.$$

■

[3.15] Kulička se zastaví v čase $t = \infty$ a urazí do té doby nekonečnou vzdálenost.

■

[3.17] Artista se musí spustit z výšky

$$h \geq \frac{5}{2}r.$$

■

[3.18] Pro velikost rychlosti houpačky v závislosti na úhlu vychýlení platí

$$v = \sqrt{2gl(\cos \varphi - \cos \varphi_0)},$$

maximální hodnota je dosažena při $\varphi = 0$ a činí

$$v_{\max} = \sqrt{2gl(1 - \cos \varphi_0)} = 2\sqrt{gl} \left| \sin \frac{\varphi_0}{2} \right|.$$

Pro velikost síly napínající závěs a její maximální hodnotu (opět pro $\varphi = 0$) platí

$$T = mg(3 \cos \varphi - 2 \cos \varphi_0), \quad T_{\max} = mg(3 - 2 \cos \varphi_0).$$

■

[3.19] Prak vymrští kámen s počáteční rychlostí o velikosti

$$v_0 = \sqrt{\frac{k}{2m}}(\alpha - 1)l.$$

■

[3.20] Po uvolnění pružiny bude kulička vystřelena do výšky

$$h = \frac{1}{2} \frac{s_1^2}{\Delta s} = 5,62 \text{ m}.$$

■

[3.22] Řidič asi pokutu dostane, neboť jel rychlostí

$$v = \sqrt{2\mu gl} = 70,4 \text{ km h}^{-1}.$$

■

[3.23] Pro vzdálenost konce vlaku a odpojeného vagónu v okamžiku jeho zastavení platí

$$\Delta s = \frac{1}{2} \frac{m}{M - m} \frac{v_0^2}{\mu g},$$

kde μ je koeficient třecí síly.

■

[3.24] Střela z kvádrů vyletí rychlostí

$$v' = v \sqrt{1 - \frac{h'}{h}} = 282,8 \text{ m s}^{-1}.$$

■

[3.26] Aby se provázek dal právě do pohybu, musí ze stolu viset jeho část délky

$$x = \frac{\mu l}{1 + \mu},$$

při jeho stažení ze stolu vykoná tíhová síla práci

$$A = \frac{\mu m g l}{2(1 + \mu)^2}.$$

[3.27] Pro délku hlavně l , velikost působící síly F a vykonanou práci platí

$$l = \frac{1}{2}v\tau = 2 \text{ m}, \quad F = m\frac{v}{\tau} = 1,5 \times 10^6 \text{ N}, \quad A = \frac{1}{2}mv^2 = 3 \times 10^6 \text{ J}.$$

[3.29] Na zpěváka působí síla o velikosti

$$\overline{F} = \frac{mv}{\Delta t} = \frac{0,1 \cdot 10}{0,1} = 10 \text{ N}.$$

[3.31] U pravého břehu bude hladina oproti levému převýšena o

$$\Delta h = d \tan \beta = \frac{2v\omega d \sin \varphi}{g} \approx 15 \text{ mm}.$$

[3.32] Pro koeficient smykového tření mezi deskou a závažím platí

$$\mu = \frac{4\pi^2 x_0}{gT^2} = 0,08.$$

[3.33] Na závaží působí maximální síla o velikosti

$$F_{\max} = \frac{4\pi^2 m z_0}{T^2} + mg = 29,1 \text{ N}.$$

Na desce bude v klidu ležet, dokud amplituda kmitů nedosáhne hodnoty

$$z_m = \frac{gT^2}{4\pi^2} = 6,2 \text{ cm}.$$

[3.35] Miska se závažím začne kmitat s amplitudou

$$A_0 = \sqrt{(\Delta l)^2 + h\Delta l}.$$

[3.36] Pro periodu T_s s pružinami zapojenými za sebe a T_p s pružinami zapojenými vedle sebe platí

$$T_s = \sqrt{T_1^2 + T_2^2}, \quad T_p = \frac{T_1 T_2}{\sqrt{T_1^2 + T_2^2}}.$$

[3.37] Pružné lano má maximální délku

$$l = l_0 + \frac{mg}{k} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2kl_0}{mg}} \right).$$

■

[3.39] Částice může vykonávat malé kmity kolem rovnovážného bodu $x_s = 0$, pro jejichž periodu platí

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{aF_0}}.$$

■

4. Lagrangeovy rovnice II. druhu

[4.2] Pohybová rovnice má tvar

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = \omega^2 \frac{r}{l} \cos(\varphi - \omega t), \quad \text{kde} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

■

[4.3] Pohybové rovnice závaží na pružině mají tvar

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi &= -\frac{2}{l} \dot{l} \dot{\varphi}, \\ \ddot{l} + \frac{k}{m} l &= \frac{k}{m} l_0 + l \dot{\varphi}^2 + g \cos \varphi. \end{aligned}$$

■

[4.4] Pohybová rovnice má tvar

$$\ddot{\alpha} + \frac{3}{2} \frac{g}{l} \cos \alpha = 0.$$

■

[4.5] Pohybové rovnice vozíku s kyvadlem mají tvar

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \mu \ddot{\varphi} \cos \varphi - \mu \dot{\varphi}^2 \sin \varphi &= 0, \\ \ddot{\varphi} + \frac{1}{l} \ddot{x} \cos \varphi + \omega_0^2 \sin \varphi &= 0, \end{aligned}$$

kde x reprezentuje polohu vozíku a $\mu = ml/(m + M)$ a $\omega_0 = \sqrt{g/l}$.

■

[4.6] Pohybová rovnice má tvar

$$\ddot{s} = g \sin \alpha - a \cos \alpha,$$

částice může setrvávat v klidu, jestliže platí $a = g \tan \alpha$.

■

[4.7] Pohybovou rovnicí můžeme psát ve tvaru

$$\ddot{\vartheta} + (\omega_0^2 - \omega^2 \cos \vartheta) \sin \vartheta = 0, \quad \text{kde} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}}.$$

■

[4.8] Pohybové rovnice můžeme psát ve tvaru

$$\ddot{\varphi} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\varphi} = 0, \quad \ddot{r} - \frac{m}{M+m} r \dot{\varphi}^2 + \frac{Mg}{M+m} = 0.$$

nebo se zavedením úhlové rychlosti $\omega = \dot{\varphi}$

$$\ddot{r} - \frac{r_0^4 \omega_0^2 m}{M+m} \frac{1}{r^3} + \frac{Mg}{M+m} = 0, \quad \omega = \frac{r_0^2}{r^2} \omega_0,$$

kde r_0 a ω_0 jsou vzdálenost a úhlová rychlost horní kuličky v nějakém okamžiku.

■

[4.10] Pohybové rovnice pro jednotlivé korálky mají tvar

$$\begin{aligned} \ddot{\vartheta}_1 + \frac{k}{m} (2\vartheta_1 - \vartheta_2 - \vartheta_3) &= 0, \\ \ddot{\vartheta}_2 + \frac{k}{m} (2\vartheta_2 - \vartheta_1 - \vartheta_3) &= 0, \\ \ddot{\vartheta}_3 + \frac{k}{m} (2\vartheta_3 - \vartheta_1 - \vartheta_2) &= 0. \end{aligned}$$

■

5. Hamiltonovy kanonické rovnice

[5.2] Hamiltonovy kanonické rovnice mají tvar

$$\begin{aligned} \dot{l} &= \frac{p_l}{m}, \\ \dot{p}_l &= \frac{p_\varphi^2}{ml^3} + mg \cos \varphi - k(l - l_0), \\ \dot{\varphi} &= \frac{p_\varphi}{ml^2}, \\ \dot{p}_\varphi &= -mgl \sin \varphi, \end{aligned}$$

kde $p_l = m\dot{l}$ a $p_\varphi = ml^2\dot{\varphi}$.

■

[5.3] Hamiltonovy kanonické rovnice můžeme psát ve tvaru

$$\dot{\alpha} = \frac{3p_\alpha}{ml^2}, \quad \dot{p}_\alpha = -\frac{1}{2}mgl \cos \alpha,$$

kde

$$p_\alpha = \frac{1}{3}ml^2\dot{\alpha}.$$

■

[5.4] Hamiltonovy kanonické rovnice můžeme psát ve tvaru

$$\dot{\vartheta} = \frac{p_{\vartheta}}{mR^2}, \quad \dot{p}_{\vartheta} = m\omega^2 R^2 \sin \vartheta \cos \vartheta - mgR \sin \vartheta,$$

kde $p_{\vartheta} = mR^2 \dot{\vartheta}$. ■

6. Dynamika soustavy hmotných bodů

[6.3] Kuličky po srážce vyskočí do výšek

$$h_1 = \left(\frac{3m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 h, \quad h_2 = \left(\frac{m_2 - 3m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 h,$$

lehčí kulička vyskočí do maximální výšky $h_{1 \max} = 9h$, pokud hmotnost m_1 bude zanedbatelně malá oproti hmotnosti m_2 . ■

[6.4] Částice se srazí v čase t_s , na místě o souřadnici x_s a vzájemnou rychlostí v_s , pro které platí

$$t_s = \sqrt{\frac{2lm_1m_2}{F(m_1 + m_2)}}, \quad x_s = \frac{m_2l}{m_1 + m_2}, \quad v_s = \sqrt{\frac{2(m_1 + m_2)Fl}{m_1m_2}}.$$

[6.6] Pro velikost rychlosti střely před srážkou v a dobu pohybu krabice t_p se zaseknutou střelou platí

$$v = \frac{m + M}{m} \sqrt{2\mu gl} = 199 \text{ m s}^{-1}, \quad t_p = \sqrt{\frac{2l}{\mu g}} = 0,505 \text{ s}.$$

[6.7] Pokud platí $m_B = m_A$, získá částice B od částice A pružnou srážkou veškerou kinetickou energii. ■

[6.8] Pokud je a) před srážkou jedna částice v klidu, srážkou se spotřebuje energie $E_s = E/2$, část energie zůstává ve formě kinetické energie spojených částic. V případě b), kdy se obě částice před srážkou pohybovaly proti sobě, platí $E_s = 2E$, neboť spojená částice má nulovou kinetickou energii. ■

[6.9] Neznámé atomové jádro má oproti α -částici $3 \times$ větší hmotnost (může to být např. uhlík ${}^{12}_6\text{C}$). ■

[6.11] Člověk se vzhledem ke břehu posune o vzdálenost

$$l' = \frac{M}{m + M} l = 0,5 \text{ m}.$$

[6.12] Dělo vystřelilo pod úhlem α' , pro který platí

$$\tan \alpha' = \left(1 + \frac{m}{M}\right) \tan \alpha.$$

[6.14] Závaží budou na pružině kmitat s periodou

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \sqrt{\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)k}}.$$

7. Mechanika tuhého tělesa

[7.2] Pro velikost sil působících na levá a pravá kola platí

$$F_1 = \frac{1}{2}mg \left(1 - \frac{hv^2}{drg}\right) = 2034 \text{ N}, \quad F_p = \frac{1}{2}mg \left(1 + \frac{hv^2}{drg}\right) = 4924 \text{ N}.$$

Automobil může po čtyřech kolech projet zatáčkou maximální rychlostí o velikosti

$$v_m = \sqrt{\frac{drg}{h}} = 214 \text{ km h}^{-1}.$$

[7.4] Zadní kolo se nedostane do smyku, pokud pro brzdné zrychlení bude platit

$$a_{sz} < \frac{\mu g/2}{1 + \mu h/d},$$

přední kolo se nedostane do smyku, bude-li platit

$$a_{sp} < \frac{\mu g/2}{1 - \mu h/d},$$

brzdění přední brzdou je tedy účinnější. Pokud by platilo

$$a_{sp} > \frac{gd}{2h},$$

cyklista přelétne přes přední kolo.

[7.5] Pro minimální úhel, pod kterým je žebřík opřený o stěnu ještě stabilní platí

$$\alpha_{\min} = \arctan \left(\frac{1}{2\mu} \right).$$

Pro minimální úhel žebříku s na něm stojícím člověkem platí

$$\alpha_{\min \text{ ž+č}} = \arctan \left[\frac{1}{2\mu} \left(\frac{\frac{2d}{l} F_{g\check{c}} + F_{g\check{z}}}{F_{g\check{c}} + F_{g\check{z}}} \right) \right].$$

Pokud je tedy žebřík opřený pod úhlem α_{\min} , žebřík se zřítí až v okamžiku, kdy člověk vystoupí do poloviční výšky! ■

[7.6] Pro minimální koeficient smykového tření nutný k zajištění stability pyramid z lahví platí

$$\mu = \frac{\sin(\pi/6)}{1 + \cos(\pi/6)} = 0,268.$$

[7.8] Těžiště homogenní polokoule leží na ose symetrie ve vzdálenosti

$$z^* = \frac{3}{8}a$$

od základny směrem k vrcholu. ■

[7.10] Nohu nejlépe umístíme do těžiště desky, které se nachází v ose desky ve vzdálenosti

$$y^* = \frac{4R}{3\pi}$$

od rovné hrany. ■

[7.11] Pro maximální počet kostek, které jdou na sebe naskládat platí $N = n$. ■

[7.12] Pro úhel sklonu ramene, za který drát visí, platí

$$\alpha = \arctan \left(\frac{b^2}{a^2 + 2ab} \right).$$

[7.15] Pro moment setrvačnosti platí

$$J = \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}mh^2,$$

za předpokladu, že $R \ll h$, výsledek přejde do tvaru

$$J \approx \frac{1}{12}mh^2,$$

viz příklad (7.13). ■

[7.16] Pro moment setrvačnosti koule vzhledem k ose rotace procházející jejím středem platí

$$J = \frac{2}{5}mR^2.$$

■

[7.17] Pro moment setrvačnosti míče můžeme psát

$$J = \frac{2}{5}mR^2 \frac{1 - (r/R)^5}{1 - (r/R)^3} \approx \frac{2}{3}mR^2,$$

kde r je vnitřní poloměr jeho stěny-

■

[7.20] Kuličku je třeba pustit z výšky

$$h \geq \frac{27}{10}r.$$

■

[7.21] Koule se po stole bude po vymizení smýkavého pohybu valit konečnou rychlostí o velikosti

$$v = \frac{5}{7}v_0.$$

■

[7.23] Aby tyčka o délce l_t , obruč o poloměru r_o a kruhová deska o poloměru r_d kývaly se stejnou periodou jako matematické kyvadlo o délce L , musí pro jejich rozměry platit

$$l_t = \frac{3}{2}L, \quad r_o = \frac{1}{2}L, \quad r_d = \frac{2}{3}L.$$

■

[7.24] Aby byla perioda kyvadla minimální, musí osa rotace procházet ve vzdálenosti

$$x = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

od středu.

■

[7.25] Kbelík do studny padá se zrychlením o velikosti

$$a = \frac{g}{1 + J/(mr^2)}.$$

■

[7.27] Tyč se bude po zaseknutí střely otáčet úhlovou rychlostí

$$\omega = \frac{6mv}{(M + 3m)l} = 5,91 \text{ s}^{-1}.$$

■

[7.28] Hmotný střed (střed) tyčky se bude pohybovat směrem úderu rychlostí o velikosti

$$v_s = \frac{I}{m} = 0,1 \text{ m s}^{-1}.$$

Úhlová rychlost otáčení tyčky po úderu bude

$$\omega = \frac{6I}{ml} = 0,5 \text{ rad s}^{-1}.$$

Střed tyčky za dobu trvání jedné otočky urazí vzdálenost

$$L = \frac{\pi l}{3} = 1,26 \text{ m.}$$

■

[7.29] Pokud pro koeficient smykového tření bude platit vztah

$$\mu = \frac{\sqrt{2} - 1}{2},$$

vykonáme při posouvání i překlápění bedny stejnou práci.

■

[7.31] Kruhová deska se bude otáčet úhlovou rychlostí

$$\omega_{dz} = \frac{mrv}{J_d + mr^2} = 0,1 \text{ s}^{-1}$$

v opačném směru chůze člověka.

■

[7.32] Pro vykonanou práci platí

$$A = 3E_{k0}.$$

■

8. Pružnost a pevnost

[8.1] Aby se měděný drát přetrhl vlastní vahou, musí pro jeho délku platit

$$l > \frac{\sigma_p}{\rho g} = 2,28 \text{ km.}$$

■

[8.3] Na vyšplhání po tuhém laně je třeba vykonat práci $A_a = mgl_0$, pokud je lano pružné, pak pro tuto práci platí

$$A_b = mgl_0 \left(1 + \frac{mg}{SE} \right).$$

■

[8.4] Komolý kužel se zatížením silou F zkrátí o vzdálenost

$$\Delta h = \frac{hF}{\pi E r_1 r_2}.$$

■

[8.6] Poloměr pilíře musí narůstat exponenciálně se vzdáleností od břemene podle předpisu

$$r(x) = \sqrt{\frac{G}{\pi \sigma_0}} \exp\left(\frac{\rho g}{2\sigma_0} x\right).$$

■

9. Gravitační pole

[9.2] Konec lana musí být ve vzdálenosti (od středu Země) minimálně

$$x = \frac{\sqrt{R_Z^2 + \frac{8\kappa M_Z}{\omega^2 R_Z}} - R_Z}{2}.$$

Dosažením číselných hodnot získáme $x \approx 151\,000$ km, což je zhruba 39% vzdálenosti mezi Zemí a Měsícem.

■

[9.4] Pro velkou poloosu a_H , vzdálenost afelia r_{\max} a numerickou výstřednost ε_H trajektorie Halleyovy komety platí

$$a_H = 17,9 \text{ AU}, \quad r_{\max} = 35,3 \text{ AU}, \quad \varepsilon_H = 0,97.$$

■

[9.6] Aby se družice pohybovala po kruhové trajektorii, musí být vystřelena rychlostí

$$v_{\text{kr}} = \sqrt{\frac{\kappa M_Z}{R_0}},$$

aby nedopadla na Zemi, musela by být vystřelena alespoň rychlostí

$$v_{\min} = \sqrt{\frac{2\kappa M_Z R_Z}{R_0(R_0 + R_Z)}} = v_{\text{kr}} \sqrt{\frac{2R_Z}{R_0 + R_Z}}.$$

■

[9.7] Oběžná doba družice T je nepřímě úměrná odmocnině průměrné hustoty planety

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{\kappa \rho}} = \frac{\text{konst.}}{\sqrt{\rho}}$$

■

[9.9] Pro poměr mezi hmotnostmi Jupiteru a Země platí

$$\frac{M_J}{M_Z} = \left(\frac{T_M}{T_G}\right)^2 \left(\frac{a_G}{a_M}\right)^3 \approx 314.$$

■

[9.11] Pro III. kosmickou rychlost platí

$$v_{\text{III}} = \sqrt{\frac{2\kappa M_Z}{R_Z} + (\sqrt{2} - 1)^2 \frac{\kappa M_S}{R_{ZS}}} = 16,7 \text{ km/s},$$

■

[9.12] Na hmotné těleso působí nulová gravitační síla ve vzdálenosti

$$r = \frac{9}{10}d$$

od středu Země směrem k Měsíci.

■

[9.13] Pro poměr výšek výskoku na Měsíci a Zemi platí

$$\frac{h_M}{h_Z} = \frac{g_Z}{g_M} \approx 6,$$

na Měsíci tedy oproti Zemi vyskočíte zhruba $6\times$ výše.

Pro poměr period kyvadlových hodin na Měsíci a na Zemi platí

$$\frac{T_M}{T_Z} = \sqrt{\frac{g_Z}{g_M}} = 2,45;$$

kukačky jdou tedy na Měsíci oproti Zemi $2,45\times$ pomaleji.

■

[9.15] Jízda tunelem z jedné strany na druhou by trvala

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{R_Z^3}{\kappa M_Z}} = 42 \text{ m } 15 \text{ s}.$$

■

[9.16] Pro vzdálenost h , ve které je velikost intenzity gravitačního pole nad i pod povrchem Země stejná, platí

$$h = R_Z \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right) \approx 0,618 R_Z,$$

kde číslo $(\sqrt{5} - 1)/2 \approx 0,618$ reprezentuje tzv. zlatý řez.

■

[9.17] Pro dobu pádu kosmické lodi na Slunce bude platit

$$t_p = \sqrt{\frac{R^3}{2\kappa M_S}} \left(\frac{\pi}{2} - \beta + \frac{1}{2} \sin 2\beta \right), \quad \text{kde} \quad \beta = \arctan \sqrt{\frac{R_S}{R - R_S}}.$$

Po dosazení číselných hodnot zjistíme, že kosmonauti mají čas $t_p = 64$ dní, 19 hodin a 20 minut na přemýšlení, kde udělali chybu. ■

[9.18] Pro potenciál a složky intenzity gravitačního pole platí

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{\kappa M}{2l} \left(\operatorname{argsinh} \frac{x-l}{y} - \operatorname{argsinh} \frac{x+l}{y} \right), \\ K_x &= -\frac{\kappa M}{2l} \left(\frac{1}{\sqrt{y^2 + (x-l)^2}} - \frac{1}{\sqrt{y^2 + (x+l)^2}} \right), \\ K_y &= \frac{\kappa M}{2yl} \left(\frac{x-l}{\sqrt{y^2 + (x-l)^2}} - \frac{x+l}{\sqrt{y^2 + (x+l)^2}} \right). \end{aligned}$$

[9.20] Pro potenciál a složky vektoru intenzity gravitačního pole můžeme psát

$$\varphi = -\frac{\kappa M}{l} \operatorname{argsinh} \frac{l}{y} + C, \quad K_x = 0, \quad K_y = -\frac{\kappa M}{y\sqrt{y^2 + l^2}}.$$

[9.21] Pro potenciál a složky intenzity gravitačního pole platí

$$\varphi = 2\kappa\mu \ln y + C, \quad K_x = 0, \quad K_y = -\frac{2\kappa\mu}{y}.$$

[9.22] Pro potenciál a intenzitu gravitačního pole platí

$$\begin{aligned} \varphi &= -\frac{2\kappa M}{a^2} \left(\sqrt{a^2 + x^2} - x \right), \\ K_x &= \frac{2\kappa M}{a^2} \left(\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - 1 \right). \end{aligned}$$

10. Speciální teorie relativity

[10.4] Rakety se k sobě navzájem přibližují rychlostí o velikosti

$$u = \frac{u_1 + u_2}{1 + u_1 u_2 / c^2} = 0,988 c.$$

[10.5] Záblesky budou na Zemi registrovány s časovým odstupem

$$\Delta\tau = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \Delta t' = 14,9 \text{ s.}$$

[10.6] Aby řidič viděl červenou barvu jako zelenou, musel by jet rychlostí

$$v = \frac{\lambda_{\text{e}}^2 - \lambda_{\text{z}}^2}{\lambda_{\text{e}}^2 + \lambda_{\text{z}}^2} c = 0,24 c,$$

takže pokutu asi dostane za rychlou jízdu.

[10.7] Jelikož pro hustotu pohybujícího se objektu platí

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 - v^2/c^2},$$

musí se pro její zdvojnásobení pohybovat rychlostí $v = c/\sqrt{2}$.

[10.10] Částice se musí pohybovat rychlostí

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2} c.$$

[10.11] Pro dobu průletu Δt_{G} vzhledem ke vztažné soustavě spojené s Galaxií a vzhledem ke vztažné soustavě spojené s protonem (Δt_{p}) platí

$$\Delta t_{\text{G}} = \frac{d}{c} = 100\,000 \text{ let}, \quad \Delta t_{\text{p}} = \frac{d}{c} \frac{F_0}{E} = 4,98 \text{ minuty}.$$

[10.12] K vyprodukovaní potřebné energie je třeba

$$m = \frac{2m_{\text{0D}} E}{(2m_{\text{0D}} - m_{\text{0He}})c^2} \approx 360 \text{ tun deuteria}.$$

[10.14] Pro klidovou hmotnost nově vzniklé částice platí

$$M_0 = \frac{2m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{5}{2} m_0,$$

tato hmotnost je tedy větší, než součet klidových hmotností částic před srážkou.

[10.15] Pro klidovou hmotnost nově vzniklé částice platí

$$M_0 = m_0 \sqrt{2} \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}} = \frac{4}{\sqrt{3}} m_0,$$

tato částice se pohybuje rychlostí

$$u = \frac{v}{1 + \sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{c}{2}.$$

■

11. Mechanika kapalin

[11.2] Aby koule na vodě plavala, musí pro její tloušťku stěny platit

$$h < R \left(1 - \sqrt[3]{\frac{\rho_m - \rho_v}{\rho_m}} \right) = 4,09 \text{ mm}.$$

■

[11.3] Pro vytažení válce z kapaliny je třeba vykonat práci

$$A = \frac{8}{25} \pi \rho g r^2 h^2.$$

■

[11.5] Hloubku, ve které se nachází nejnižší bod koule najdeme řešením kubické rovnice

$$h^3 - 3Rh^2 + 4\frac{\rho}{\rho_m}R^3 = 0.$$

Pomocí Cardanových vzorců (které najdete v matematických tabulkách), nebo numericky na počítači po dosazení číselných hodnot dostaneme $h = 5,1 \text{ cm}$.

■

[11.6] Pro hmotnost předmětu platí

$$m = m_z \frac{1 - \frac{\rho_v}{\rho_z}}{1 - \frac{\rho_v}{\rho}} = m_z \left(1 + \rho_v \frac{\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_z}}{1 - \frac{\rho_v}{\rho}} \right).$$

Z výsledku je patrné, že zejména při vážení objektů s malou hustotou je třeba při určování hmotnosti provádět příslušnou korekci, neboť jejich skutečná hmotnost je větší, než hmotnost závaží m_z .

■

[11.7] Pro poměr hustot kapalin platí

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{h_2}{h_1}.$$

■

[11.8] Pro periodu harmonických kmitů kapaliny v u-trubici platí

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l_0}{2g}}.$$

■

[11.12] Pro velikost momentu síly platí

$$M = \frac{1}{6}\rho g l h^2 |h - 3z_0|,$$

takže pro $z_0 = h/2$ dostaneme

$$M = \frac{1}{12}\rho g l h^3.$$

Moment síly je nulový, pokud $z_0 = h/3$.

■

[11.13] Proud vody se zužuje podle předpisu

$$r(x) = \frac{R}{\sqrt[4]{1 + 2gx/v_0^2}}.$$

■

[11.16] Aby hladina klesala konstantní rychlostí, musí platit

$$r(z) \propto \sqrt[4]{z}.$$

■

[11.17] Na píst stříkačky je třeba působit silou

$$F = \frac{2\rho}{\pi} \left(\frac{d_s^4 - d_j^4}{d_s^2 d_j^4} \right) \left(\frac{\Delta V}{\Delta t} \right)^2 = 7,64 \text{ N}.$$

■

[11.18] Hladina se ustálí ve výšce

$$h = \frac{Q^2}{2gS^2} = 10 \text{ cm}$$

ode dna nádoby.

■

[11.20] Aby kapalina z obou otvorů dolétla do stejné vzdálenosti x , musí platit

$$H = z_1 + z_2,$$

přičemž

$$x = 2\sqrt{z_1 z_2}.$$

■

12. Elektrostatické pole

[12.1] Elektrostatická síla je o 42 řádů silnější, platí-

$$\frac{F_C}{F_G} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_e^2}{m_e^2} \approx 10^{42},$$

kde q_e a m_e jsou hmotnost a náboj elektronu. ■

[12.4] Náboje budou v rovnováze, pokud bude platit

$$Q = (1 + 2\sqrt{2})\frac{q}{4}. \quad \blacksquare$$

[12.6] Pro potenciál v ose nabitě kruhové desky platí

$$\varphi = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}(\sqrt{a^2 + z^2} - |z|).$$

Pro složky vektoru intenzity elektrického pole platí

$$E_x = 0, \quad E_y = 0, \quad E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\text{sign}(z) - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right].$$

Pro $|z| \ll a$ můžeme psát

$$E_z \approx \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \text{sign}(z). \quad \blacksquare$$

[12.8] Pro velikost síly, kterou na sebe navzájem působí úseky nití délky l platí

$$F = \frac{\tau_1 \tau_2 l}{2\pi\epsilon_0 h}.$$

Jestliže $\tau_1 \tau_2 > 0$, síla je odpudivá, v opačném případě je přitažlivá. ■

[12.10] Pro vektor intenzity elektrického pole platí

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{pro } r < R, \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r}, & \text{pro } r \geq R. \end{cases}$$

pro potenciál můžeme psát

$$\varphi = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}, & \text{pro } r < R, \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}, & \text{pro } r \geq R. \end{cases} \quad \blacksquare$$

[12.11] Nově vzniklá kapka má oproti nekonečnu potenciál

$$\varphi_N = \sqrt[3]{N^2} \varphi_1 = 3,3 \text{ kV}.$$

[12.13] Pro kapacitu kondenzátoru platí

$$C = \varepsilon_0 \frac{S - S_d}{d} + \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S_d}{d} = \varepsilon_0 \frac{S}{d} \left[1 + (\varepsilon_r - 1) \frac{S_d}{S} \right].$$

[12.15] Pro kapacitu Zeměkoule platí

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R_Z = 709 \mu\text{F}.$$

[12.16] Pro kapacitu válcového kondenzátoru platí

$$C = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

[12.17] Pro kapacitu dvojlinky můžeme psát

$$C = \frac{\pi\varepsilon_0 l}{\ln \frac{a-r}{r}}.$$

[12.19] Za uvedených předpokladů by pro poloměr elektronu muselo platit

$$r_e = \frac{q_e^2}{8\pi\varepsilon_0 c^2 m_e} = 1,4 \times 10^{-15} \text{ m}.$$

[12.21] Desky kondenzátoru se přitahují silou o velikosti

$$F = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{2d^2} = 44,3 \text{ mN}.$$

[12.23] Pro rychlost elektronu uprostřed mezi elektrodami a při dopadu na anodu platí

$$v_{1/2} = \sqrt{\frac{2q_e U \ln[(a+b)/2a]}{m_e \ln(b/a)}} = 8,8 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}, \quad v_a = \sqrt{\frac{2q_e U}{m_e}} = 10,3 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}.$$

13. Stacionární elektrický proud

[13.2] Pro celkovou hybnost všech elektronů v kabelu platí

$$p = \frac{m_e I l}{q_e} = 2,27 \times 10^{-4} \text{ kg m s}^{-1}.$$

■

[13.4] Pro odpor kulového rezistoru platí

$$R = \frac{\varrho}{4\pi} \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

a $RC = \varrho \varepsilon$.

■

[13.6] Napětí na kondenzátoru poklesne p -krát za čas

$$\tau = RC \ln p.$$

■

[13.7] Pro vstupní odpor nekonečného obvodu platí

$$R_i = \frac{R_1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4R_2}{R_1}} \right).$$

■

[13.9] Pro elektrický odpor „krychle“ platí

$$R_k = \frac{5}{6} R.$$

■

[13.11] Ke zhotovení topné spirály je zapotřebí drát délky

$$l = \frac{\pi d^2 \mathcal{E}^2}{4 \varrho P} = 1,67 \text{ m}.$$

■

14. Magnetostatické pole

[14.2] Vektor magnetické indukce v ose kruhové smyčky má axiální směr a pro jeho velikost platí

$$B = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}}.$$

■

[14.3] Magnetická indukce v ose uprostřed mezi smyčkami bude zhruba konstantní, pokud jejich vzdálenost bude rovna poloměru, pro velikost indukce pak platí

$$B \approx \frac{8}{5\sqrt{5}} \frac{\mu_0 I}{a}.$$

[14.4] Pro velikost vektoru magnetické indukce platí

$$B = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi a}.$$

[14.6] Magnetická indukce má na ose rotace směr této osy a platí pro ni

$$B = \begin{cases} \frac{\mu_0 \omega Q}{6\pi a}, & \text{pro } z \leq a \\ \frac{\mu_0 \omega a^2 Q}{6\pi z^3}, & \text{pro } z > a \end{cases}.$$

[14.9] Pro velikost vektoru magnetické indukce uprostřed solenoidu platí

$$B = \frac{\mu_0 n I}{\sqrt{1 + (2R/l)^2}} \approx \mu_0 n I \quad \text{pro } R \ll l,$$

pro indukci na okraji solenoidu platí

$$B = \frac{\mu_0 n I}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + (R/l)^2}}.$$

[14.10] Vektor magnetické indukce má azimutální směr, vně toroidu je nulový a pro jeho velikost uvnitř plat

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r},$$

orientaci určíme pravidlem pravé ruky.

[14.12] Protilehlé úseky nití délky l na sebe působí přitažlivou silou o velikosti

$$F = \frac{\tau^2 l}{2\pi h} \left(\frac{1}{\varepsilon_0} - \mu_0 v^2 \right).$$

Velikost této síly se blíží k nule pro

$$v \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = c \quad (\text{rychlost světla ve vakuu}).$$

[14.14] Vektor rychlosti nabitě částice má složky

$$v_x = \frac{E_0}{B_0} \sin \frac{qB_0}{m} t, \quad v_y = \frac{E_0}{B_0} \left(\cos \frac{qB_0}{m} t - 1 \right), \quad v_z = 0.$$

Vektor rychlosti má střední hodnotu $\bar{\mathbf{v}} = (0, -E_0/B_0, 0)$ což znamená, že částice se posouvá (driftuje) kolmo na oba vektory \mathbf{E} a \mathbf{B} a velikost této driftové rychlosti nezávisí na hmotnosti a náboji částice!

Pro polohový vektor částice můžeme psát

$$x = \frac{\beta}{\alpha^2}(1 - \cos \alpha t), \quad y = \frac{\beta}{\alpha^2}(\sin \alpha t - \alpha t), \quad z = 0,$$

kde $\alpha = qB_0/m$ a $\beta = qE_0/m$. Trajektorií částice je tedy cykloida. ■

15. Elektromagnetická indukce

[15.2] Spojka se začne pohybovat doprava rychlostí

$$v = \frac{U}{Bh} \left[1 - \exp \left(-\frac{B^2 h^2}{mR} t \right) \right].$$

[15.3] Diskem protéká proud

$$I = \frac{\omega B a^2}{2R}$$

radiálním směrem od středu disku k jeho okraji. ■

[15.5] Smyčkou protéká střídavý proud

$$I = \frac{\pi a^2 \omega B_0}{4R} \sin(\omega t).$$

[15.6] Ve smyčce se indukuje elektromotorické napětí o amplitudě

$$\mathcal{E}_0 = \frac{\mu_0 I_0 a \omega}{2\pi} \ln \frac{a+h}{h} = 0,382 \text{ mV}.$$

[15.8] Pro vlastní indukčnost toroidální cívky platí

$$L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

16. Pár příkladů z vektorové analýzy

[16.1]

$$\begin{aligned} 1) \quad \nabla |\mathbf{R}| &= \frac{\mathbf{R}}{R} = \mathbf{R}_0, \\ 2) \quad \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{R}|} \right) &= -\frac{\mathbf{R}}{R^3} = -\frac{\mathbf{R}_0}{R^2}. \end{aligned}$$

[16.2] Vrchol kopce se nachází v bodě $V = [-2, 3]$ ve výšce $h_{\max} = 720$ m. Pro jednotkový vektor ve směru největšího stoupání v bodě A platí $\mathbf{t}_0 = (-1, 1)/\sqrt{2}$, pro jednotkové vektory ve směru vrstevnice platí $\mathbf{k}_{01} = (1, 1)/\sqrt{2}$ a $\mathbf{k}_{02} = (-1, -1)/\sqrt{2}$. ■

[16.3]

- 1) $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3,$
- 2) $\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \right) = 0 \quad \text{pro } \mathbf{r} \neq \mathbf{0},$
- 3) $\nabla \cdot \mathbf{E} = -i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{E}.$

[16.4]

- 1) $\nabla \times \mathbf{F} = (0, 0, 2\omega),$
- 2) $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0},$
- 3) $\nabla \times \mathbf{F} = -i\mathbf{k}_0 \times \mathbf{F}.$

[16.5] Pole je potenciální a pro jeho potenciál platí

$$\varphi = -x^2y - xz^3 - y^2 + 2z + c,$$

kde c je libovolná konstanta. ■

[16.6] Pro trajektorii \mathcal{L}_1 dostaneme $A_1 = 2$, pro trajektorii \mathcal{L}_2 potom $A_2 = -2/3$. Pro rotaci platí $\nabla \times \mathbf{F} = (0, 0, -2)$. Pomocí křivkového integrálu jsme počítali „práci“ na trajektoriích \mathcal{L}_1 a \mathcal{L}_2 . To, že výsledek je závislý na trajektorii je ve shodě se skutečností, že $\nabla \times \mathbf{F} \neq \mathbf{0}$, vektorové pole není potenciální. ■

18. Reference

- [1] Vladimír Hajko, *Fyzika v příkladoch*, Alfa, Bratislava, 1983.
- [2] Antonín Syrový, *Sbírka příkladů z fyziky*, SNTL, Praha, 1971.
- [3] Jiří Bajer, *Mechanika 1*, VUP Olomouc, Olomouc, 2004.
- [4] Jiří Bajer, *Mechanika 2*, VUP Olomouc, Olomouc, 2004.
- [5] Ivan Štoll, *Mechanika*, ČVUT, Praha, 1995.
- [6] Ivan Štoll, *Elektřina a magnetismus*, ČVUT, Praha, 1998.
- [7] Jaroslava Drchalová, *FYZIKA - Příklady*, ČVUT, Praha, 1997.
- [8] Walter Greiner, *Classical Mechanics: Point Particles and Relativity (Classical Theoretical Physics)*, Springer-Verlag, New York, 2004.
- [9] Walter Greiner, *Classical Mechanics: Systems of Particles and Hamiltonian Dynamics (Classical Theoretical Physics)*, Springer-Verlag, New York, 2003.
- [10] Filip Uhlík, Zuzana Limpouchová, Eduard Vavřinec, *Sbírka příkladů z mechaniky*, Univerzita Karlova v Praze, Nakladatelství Karolinum, Praha, 2000.
- [11] Karel Rektorys, *Co je a k čemu je vyšší matematika*, ACADEMIA, Praha, 2001.
- [12] David J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, Prentice Hall, New Jersey, 1999.
- [13] Martin Libra a kol., *Fyzika v příkladech pro studenty technických univerzit*, Nakladatelství R. Hájek, 2003.
- [14] Vernon Barger, Martin Olsson, *Classical Mechanics: A Modern Perspective*, 2nd Edition, McGraw-Hill Companies, 1994.
- [15] John David Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd edition, Wiley, 1998.
- [16] Herbert Goldstein, Charles P. Poole, John L. Sefko, *Classical Mechanics*, 3rd edition, Addison Wesley, 2001.
- [17] Jorge V. José, Eugene J. Saletan, *Classical Dynamics: A Contemporary Approach*, Cambridge University Press, 1998.
- [18] Milan Macur, *Úvod do analytické mechaniky a mechaniky kontinua*, Vutium, 2010.
- [19] Frank Y. Wang, *Physics with MAPLE: The Computer Algebra Resource for Mathematical Methods in Physics*, Wiley-VCH, 2006.